

Probabilistyka

Z_7

1. Wektor (X, Y) ma rozkład ciągły o gęstości

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} a & , \quad -2 \leq x \leq 0 \quad \wedge \quad 0 \leq y \leq 2 \\ 1/2 & , \quad 0 < x \leq 1 \quad \wedge \quad 0 < y \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{w p.p.} \end{cases}$$

gdzie a jest pewną liczbą rzeczywistą. Wyznaczyć stałą a . Obliczyć $F_{XY}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

2. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład ciągły o gęstości

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} e^{-y} & , \quad x \geq 0 \quad \wedge \quad y \geq x \\ 0 & , \quad \text{w p.p.} \end{cases}$$

Wyznaczyć gęstości brzegowe. Obliczyć $P(X + Y \leq 2)$.

3. Pewna firma komputerowa prowadzi działalność w Warszawie i poza Warszawą. Niech X i Y oznaczają liczbę kontraktów zawieranych przez firmę w ciągu tygodnia odpowiednio w Warszawie i poza Warszawą. Wtedy zmienna losowa (X, Y) ma rozkład dyskretny o funkcji prawdopodobieństwa danej w tabeli

$X \setminus Y$	0	1	2
0	a	$2a$	$3a$
1	b	c	d

gdzie a, b, c, d są liczbami z przedziału $(0; 1)$. Wiadomo, że zmienne losowe X i Y są niezależne oraz $P(X = 0) = 2 \cdot P(X = 1)$. Wyznaczyć a, b, c, d .

4. X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $X \sim U([0; 2])$, $Y \sim U([0; 1])$. Obliczyć $P(Y < X^2)$.
5. Niech X i Y oznaczają czas pracy (w dniach) dwóch serwerów na uczelni. Z doświadczenia wynika, że wektor (X, Y) ma rozkład ciągły z gęstością

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-x-y} & , \quad x > 0, y > 0 \\ 0 & , \quad \text{w p.p.} \end{cases}$$

- (a) Sprawdzić, czy zmienne losowe X i Y są niezależne.
- (b) Obliczyć $P(1 < X \leq 3, 1 \leq Y < 2)$ oraz $P(Y > 1 | X \leq 2)$.
- (c) Obliczyć prawdopodobieństwo, że łączny czas pracy obu serwerów będzie przekraczał 100 dni.