Probabilistyka

Z_6

1. Automat produkuje kulki metalowe o średnicy X będącej zmienną losową o rozkładzie jednostajnym w przedziale $[0,4;0,6]$. Za zgodne z normą uznaje się kulki o średnicy z przedziału $[0,41;0,59]$.
   (a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że losowo wybrana z produkcji kulka spełnia wymagania normy;
   (b) Jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba kulek spełniających wymagania normy wśród 1000 kulek?
2. Na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdzie $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ oraz $P(\{k\}) = 0.1$ dla każdego $k \in \Omega$, określone są zmienne losowe:
$$X(k) = \cos(k\pi)\,,\; Y(k) = \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right).$$
   Wyznaczyć funkcję prawdopodobieństwa wektora (X, Y). Obliczyć $P(X = Y)$.
3. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład dyskretny dany tabelą:

$X \setminus Y$	-1	0	1
-1	$a - 1/16$	$1/4 - a$	0
0	$1/8$	$3/16$	$1/8$
1	$a + 1/16$	$1/16$	$1/4 - a$

,

   gdzie $a \in \mathbb{R}$ jest nieznane.
   (a) Jakie wartości może mieć parametr a?
   (b) Wyznaczyć a wiedząc, że $P(X > 2Y) = \frac{7}{16}$.
   (c) Obliczyć $F_{XY}(0, 1)$ oraz $F_{XY}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
4. Wektor (X, Y) ma rozkład dyskretny o dystrybuancie
$$F_{XY}(x,y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \quad \vee \quad y < 0 \\ 1/4, & x \in [0;2) \quad \wedge \quad y \in [0;1) \\ 1/2, & x \in [0;2) \quad \wedge \quad y \geqslant 1 \\ 3/4, & x \geqslant 2 \quad \wedge \quad y \in [0;1) \\ 1, & x \geqslant 2 \quad \wedge \quad y \geqslant 1 \end{cases}.$$
   Wyznaczyć funkcję prawdopodobieństwa rozkładu łącznego wektora (X, Y) oraz funkcje prawdopodobieństwa rozkładów brzegowych.
5. Wektor (X, Y) ma rozkład dyskretny z funkcją prawdopodobieństwa
$$P(X = k, Y = l) = \frac{1}{3^{k+1} \cdot 2^l},\;\; k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$
   Wyznaczyć funkcje prawdopodobieństwa rozkładów brzegowych.

6. Na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdzie $\Omega = [0;2]$, a P jest prawdopodobieństwem geometrycznym, określone są zmienne losowe:

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & , \quad \omega \in [0;1) \\ 1 & , \quad \omega = 1 \\ 2 & , \quad \omega \in (1;2] \end{cases} , \qquad Y(\omega) = \begin{cases} -1 & , \quad \omega \in [0;1.5] \\ 1 & , \quad \omega \in (1.5;2] \end{cases} .$$

Wyznaczyć funkcję prawdopodobieństwa oraz dystrybuantę wektora (X, Y).

7. Dystrybuanta dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y) dana jest wzorem

$$F(x,y) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{y}\right) & x \geqslant 2 \ \wedge \ y \geqslant 2 \\ 0 & x < 2 \ \vee \ y < 2 \end{cases} .$$

Wyznaczyć dystrybuanty brzegowe. Obliczyć prawdopodobieństwa:
$P(X > 2)$, $P(1 < X \leqslant 3, 1 < Y \leqslant 4)$, $P(X = 2, Y = 2)$.