Probabilistyka

Z_0

1. Przeciwobrazy

Definicja 1. *Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją określoną na zbiorze X, o wartościach w zbiorze Y.* **Przeciwobrazem** *zbioru $C \subset Y$ nazywamy zbiór*

$$f^{-1}(C) = \{x \in X :\ f(x) \in C\}.$$

Zad 1. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją taką, że $f(x) = x^2$. Wyznaczyć:

$$f^{-1}([0;4)),\ f^{-1}((-2;-1))\ f^{-1}((0;1]).$$

Zad 2. Dla podanych poniżej funkcji f wyznaczyć $f^{-1}((-\infty;t])$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$:

(a) $f : \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \cos x,$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|,$

(c) $f : [0;1] \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \begin{cases} 0 & ,\ x \in \left[0;\frac{1}{8}\right] \cup \left[\frac{3}{8};\frac{4}{8}\right] \cup \left[\frac{6}{8};\frac{7}{8}\right] \\ 1 & ,\ x \in \left(\frac{1}{8};\frac{2}{8}\right] \cup \left(\frac{4}{8};\frac{5}{8}\right] \cup \left(\frac{7}{8};1\right] \\ 2 & ,\ x \in \left(\frac{2}{8};\frac{3}{8}\right) \cup \left(\frac{5}{8};\frac{6}{8}\right) \end{cases},$

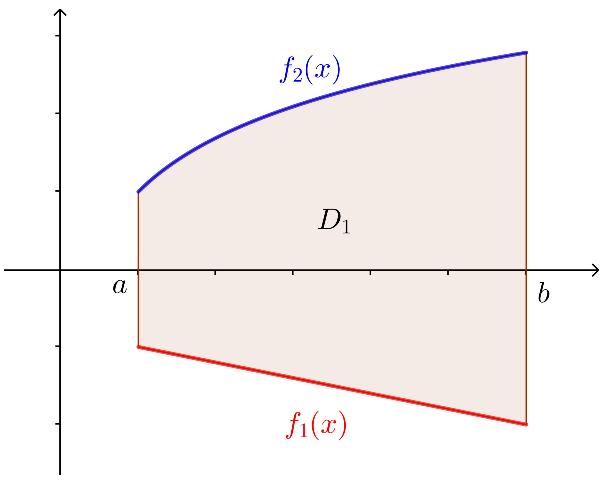
(d) $f : [-1;3] \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \begin{cases} 3/2 & ,\ x = -1 \\ x^2 & ,\ x \in (-1;0) \\ x & ,\ x \in [0;1] \\ 1 & ,\ x \in (1;2) \\ 2 & ,\ x \in [2;3] \end{cases}.$

2. Całka podwójna

Definicja 2. *Zbiór $D_1 \subset \mathbb{R}^2$ nazywamy* **obszarem normalnym** *względem osi OX, jeśli*

$$D_1 = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b,\ f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x)\},$$

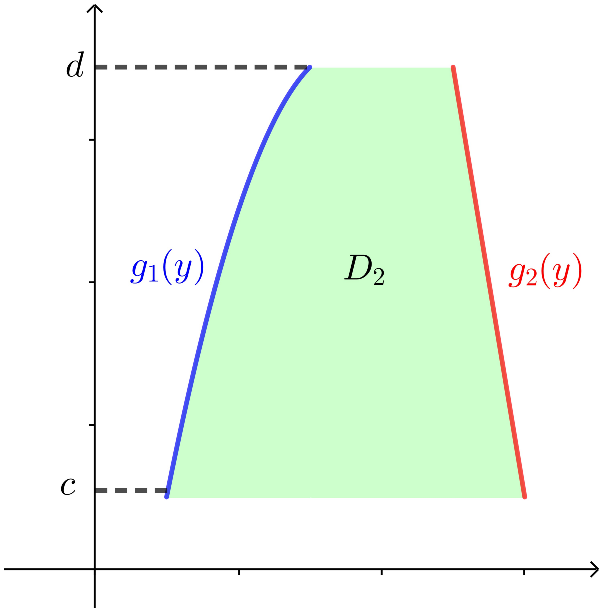
gdzie f_1 i f_2 są funkcjami ciągłymi w przedziale $[a;b]$.



Definicja 3. *Zbiór* $D_2 \subset \mathbb{R}^2$ *nazywamy* **obszarem normalnym** *względem osi* OY, *jeśli*

$$D_2 = \{(x,y) : c \leqslant y \leqslant d,\ g_1(y) \leqslant x \leqslant g_2(y)\},$$

gdzie g_1 *i* g_2 *są funkcjami ciągłymi w przedziale* $[c;d]$.



Uwagi:

- Jeśli funkcja f jest ciągła w obszarze normalnym D_1, to

$$\iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx \overset{ozn.}{=} \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

- Jeśli funkcja f jest ciągła w obszarze normalnym D_2, to

$$\iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy \overset{ozn.}{=} \int_c^d dy \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

Powyższe całki nazywamy **całkami iterowanymi**.

Zad 3. Obliczyć całki:

(a) $\iint\limits_D xy\,dxdy$, gdzie $D = [0;2] \times [1;4]$,

(b) $\iint\limits_D 3\,dxdy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym prostymi $x = 2$, $y = 1$, $y = 2$, $y - x = 2$.

Zad 4. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją taką, że $f(x,y) = \frac{3}{4}x \cdot \mathbf{1}_D(x,y)$, gdzie D jest obszarem ograniczonym prostymi $x = 2$, $y = x$ oraz krzywą $xy = 1$.

(a) Obliczyć $\iint_D f(x,y)\,dxdy$,

(b) Wyznaczyć funkcje $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy, \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx.$$

Uwaga:

$$\mathbf{1}_D(x,y) = \begin{cases} 1 & , \quad \text{gdy}(x,y) \in D \\ 0 & , \quad \text{gdy}(x,y) \notin D \end{cases}.$$

2.1 Zamiana zmiennych na współrzędne biegunowe: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$.

Odpowiednikiem koła $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leqslant R^2\}$ jest we współrzędnych biegunowych prostokąt $\Delta = \{(\varphi, r) : 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant r \leqslant R\}$. Wtedy

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_\Delta f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,drd\varphi.$$

Zad 5. Wprowadzając współrzędne biegunowe obliczyć całkę $\iint\limits_D x\cdot\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, gdzie $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leqslant 4,\ y \geqslant 0,\ y \geqslant x\}$.