MATEMATYKA KONKRETNA 1 $\quad Z_3$

1. Niech $z_1 = 3 + 2j$, $z_2 = 2 - 5j$. Obliczyć:
   a) $z_1^2 + jz_2$, $\quad \mathrm{Re}\,(z_1 \cdot z_2)$, $\quad$ b) $|2\,\overline{z}_1 + \mathrm{Im}\, z_2|$, $\quad$ c) $\dfrac{\overline{z}_2 - j|z_1 + 2j|}{z_1}$.

2. Czy podane równości zachodzą dla dowolnych $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$?
   (a) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$
   (b) $\mathrm{Re}\,(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Re}\, z_1 \cdot \mathrm{Re}\, z_2$
   (c) $z - \overline{z} = 2j\,\mathrm{Im}\, z$

3. Zapisać w postaci trygonometrycznej oraz wykładniczej następujące liczby:
   a) $-e,\ \pi j$, b) $3 - 3j$, $\quad 5\sqrt{2}j - 5\sqrt{2}$, $\quad$ c) $1 + j\sqrt{3}$, $\quad \sqrt{6} - j\sqrt{2}$.

4. Zapisać w postaci algebraicznej następujące liczby:
   a) $4(\cos 7\pi + j\sin 7\pi)$, $\quad \sqrt{2}(\cos(\frac{7\pi}{4}) + j\sin(\frac{7\pi}{4}))$, $\quad$ b) $2(\cos(-\frac{16\pi}{3}) + j\sin(-\frac{16\pi}{3}))$.

5. Wyznaczyć argument główny oraz moduł podanych liczb (wykorzystać funkcje arcsin lub arctan)
   a) $z_1 = 3j - 4$, $\quad$ b) $z_2 = 5 - 12j$, $\quad$ c) $z_3 = -6 - 8j$, $\quad$ d) $z_4 = \sqrt{2 - \sqrt{2}} + j\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

   (wskazówka do d): obliczyć z_4^2.)

6. Zilustrować na płaszczyźnie zespolonej zbiór liczb zespolonych spełniających podany warunek.
   (a) $1 \leqslant |z + 2 - 3j| < 3$
   (b) $\dfrac{\pi}{4} \leqslant \arg(z + 2 - j) < \dfrac{2\pi}{3}$
   (c) $\left|\dfrac{z}{z + 2 - 2j}\right| \geqslant 1$
   (d) $|z - 2j| + |z| = 4$ $\quad$ (przydatne będą własności elipsy)
   (e) $|z + 2| + |z| = 2$
   (f) $|z - j| = |2jz + 1|$
   (g) $0 \leqslant \arg(jz^3) < \pi$
   (h) $\mathrm{Im}\,(z^4) < 0$
   (i) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z + j}{z - j}\right) \leqslant 0$