Rachunek Prawdopodobieństwa i Statystyka

Z_0

1. Suma i iloczyn mnogościowy

Niech X będzie dowolnym niepustym zbiorem, $A_1, A_2, \ldots$ podzbiorami zbioru X, I podzbiorem zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$. Wtedy:

$$\begin{aligned} \bigcup_{n\in I} A_n &= \{x \in X : \exists\, n \in I,\, x \in A_n\} \\ \bigcap_{n\in I} A_n &= \{x \in X : \forall\, n \in I,\, x \in A_n\}\,. \end{aligned}$$

Zad 1. Wyznaczyć $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, jeśli zbiory A_n, $n = 1, 2, \ldots$, określone są następująco:

(a) $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n+1}\right\}$;

(b) $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{n} \leqslant x \leqslant \sqrt{2n}\right\}$;

(c) $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} : 1 - \dfrac{1}{n+1} \leqslant x \leqslant 2 + \dfrac{1}{n+1}\right\}$;

(d) $A_n = \{x \in \mathbb{R} : \sin x = n\}$.

2. Przeciwobrazy

Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją określoną na zbiorze X, o wartościach w zbiorze Y.
Przeciwobrazem zbioru $C \subset Y$ nazywamy zbiór $f^{-1}(C)$ taki, że

$$f^{-1}(C) = \{x \in X :\ f(x) \in C\}.$$

Zad 2. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją taką, że $f(x) = x^2$. Wyznaczyć:

$$f^{-1}\left([0; 4)\right),\ f^{-1}\left((-2; -1)\right)\ f^{-1}\left((0; 1]\right).$$

Zad 3. Dla podanych poniżej funkcji f wyznaczyć $f^{-1}\left((-\infty; t]\right)$, dla każdego $t \in \mathbb{R}$:

(a) $f : \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \cos x$;

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \left|x - \dfrac{1}{2}\right|$;

(c) $f : [0; 1] \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \begin{cases} 0 & ,\ x \in \left[0; \frac{1}{8}\right] \cup \left[\frac{3}{8}; \frac{4}{8}\right] \cup \left[\frac{6}{8}; \frac{7}{8}\right] \\ 1 & ,\ x \in \left(\frac{1}{8}; \frac{2}{8}\right] \cup \left(\frac{4}{8}; \frac{5}{8}\right] \cup \left(\frac{7}{8}; 1\right] \\ 2 & ,\ x \in \left(\frac{2}{8}; \frac{3}{8}\right) \cup \left(\frac{5}{8}; \frac{6}{8}\right) \end{cases}$;

(d) $f : [-1; 3] \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \begin{cases} 3/2 & ,\ x = -1 \\ x^2 & ,\ x \in (-1; 0) \\ x & ,\ x \in [0; 1] \\ 1 & ,\ x \in (1; 2) \\ 2 & ,\ x \in [2; 3] \end{cases}$.

3. Całka podwójna

Zad 4. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją taką, że $f(x,y) = \frac{3}{4}x \cdot \mathbf{1}_D(x,y)$, gdzie D jest obszarem ograniczonym prostymi $x = 2$, $y = x$ oraz krzywą $xy = 1$.

(a) Obliczyć $\iint_D f(x,y)\,dxdy$,

(b) Wyznaczyć funkcje $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy, \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx.$$

Uwaga:

$$\mathbf{1}_D(x,y) = \begin{cases} 1 & , \ \text{gdy}(x,y) \in D \\ 0 & , \ \text{gdy}(x,y) \notin D \end{cases} .$$

4. Kombinatoryka

Zad 5. Na ile sposobów z grupy zawierającej 15 małżeństw wybrać można 4 osoby tak, aby w jej skład nie wchodziło żadne małżeństwo?

Zad 6. Na ile sposobów można n rozróżnialnych kul umieścić w n pudełkach tak, aby

(a) nie było pustych pudełek;

(b) dokładnie 1 pudełko było puste?

Zad 7. Na ile sposobów można ustawić cyfry $0, 1, ..., 9$ tak, aby:

(a) między 0 i 1 znajdowały się dokładnie cztery cyfry?

(b) $7, 8, 9$ stały obok siebie?