

Rachunek Prawdopodobieństwa i Statystyka

Z_7

1. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład dyskretny dany tabelą:

$X \setminus Y$	-1	0	1
-1	$a - 1/16$	$1/4 - a$	0
0	$1/8$	$3/16$	$1/8$
1	$a + 1/16$	$1/16$	$1/4 - a$

gdzie $a \in \mathbb{R}$ jest nieznanne.

- (a) Jakie wartości może mieć parametr a ?
- (b) Wyznaczyć a wiedząc, że $P(X > 2Y) = \frac{7}{16}$.
- (c) Obliczyć $F_{XY}(0, 1)$ oraz $F_{XY}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
2. Na przestrzeni probabilistycznej (Ω, \mathcal{F}, P) , gdzie $\Omega = [0; 2]$, a P jest prawdopodobieństwem geometrycznym, określone są zmienne losowe:

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & , \omega \in [0; 1) \\ 1 & , \omega = 1 \\ 2 & , \omega \in (1; 2] \end{cases}, \quad Y(\omega) = \begin{cases} -1 & , \omega \in [0; 1.5] \\ 1 & , \omega \in (1.5; 2] \end{cases}.$$

Wyznaczyć funkcję prawdopodobieństwa rozkładu zmiennej losowej (X, Y) .

3. Wektor (X, Y) ma rozkład ciągły o gęstości

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} a & , -2 \leq x \leq 0 \quad \wedge \quad 0 \leq y \leq 2 \\ 1/2 & , 0 < x \leq 1 \quad \wedge \quad 0 < y \leq 1 \\ 0 & , \text{ w p.p.} \end{cases},$$

gdzie a jest pewną liczbą rzeczywistą. Wyznaczyć stałą a . Obliczyć $F_{XY}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

4. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład ciągły o gęstości

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} e^{-y} & , x \geq 0 \wedge y \geq x \\ 0 & , \text{ w p.p.} \end{cases}.$$

Wyznaczyć gęstości brzegowe.

5. Wektor (X, Y) ma rozkład dyskretny o dystrybucie

$$F_{XY}(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \quad \vee \quad y < 0 \\ 1/4, & x \in [0; 2) \quad \wedge \quad y \in [0; 1) \\ 1/2, & x \in [0; 2) \quad \wedge \quad y \geq 1 \\ 3/4, & x \geq 2 \quad \wedge \quad y \in [0; 1) \\ 1, & x \geq 2 \quad \wedge \quad y \geq 1 \end{cases}.$$

Wyznaczyć funkcję prawdopodobieństwa wektora (X, Y) oraz funkcje prawdopodobieństwa rozkładów brzegowych. Sprawdzić, czy zmienne losowe X i Y są niezależne.

6. Pewna firma komputerowa prowadzi działalność w Warszawie i poza Warszawą. Niech X i Y oznaczają liczbę kontraktów zawieranych przez firmę w ciągu tygodnia odpowiednio w Warszawie i poza Warszawą. Wtedy zmienna losowa (X, Y) ma rozkład dyskretny o funkcji prawdopodobieństwa danej w tabeli

$X \setminus Y$	0	1	2
0	a	$2a$	$3a$
1	b	c	d

gdzie a, b, c, d są liczbami z przedziału $(0; 1)$. Wiadomo, że zmienne losowe X i Y są niezależne oraz $P(X = 0) = 2 \cdot P(X = 1)$. Wyznaczyć a, b, c, d .

7. Niech X i Y oznaczają czas pracy (w dniach) dwóch serwerów na uczelni. Z doświadczenia wynika, że wektor (X, Y) ma rozkład ciągły z gęstością

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-x-y} & , \quad x > 0, y > 0 \\ 0 & , \quad \text{w p.p.} \end{cases} .$$

- (a) Sprawdzić, czy zmienne losowe X i Y są niezależne.
(b) Obliczyć $P(1 < X \leq 3, 1 \leq Y < 2)$ oraz $P(Y > 1 | X \leq 2)$.
(c) Obliczyć prawdopodobieństwo, że łączny czas pracy obu serwerów będzie przekraczał 100 dni.