Rachunek Prawdopodobieństwa i Statystyka

Z_3

1. Kierowca na swojej drodze przejeżdża przez 3 skrzyżowania z sygnalizacją świetlną. Na pierwszym jest zatrzymywany z prawdopodobieństwem 2/3, na drugim z prawdopodobieństwem 1/2, na trzecim z prawdopodobieństwem 1/3, przy czym te zatrzymania są niezależne od siebie. Niech X oznacza liczbę skrzyżowań, na których kierowca musiał się zatrzymać. Wyznaczyć funkcję prawdopodobieństwa oraz dystrybuantę zmiennej losowej X.

2. Zmienna losowa X ma rozkład dyskretny o dystrybuancie

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 1 \\ \frac{1}{8} & , \quad 1 \leqslant x < 2 \\ \frac{1}{2} & , \quad 2 \leqslant x < 3 \\ \frac{3}{4} & , \quad 3 \leqslant x < 4 \\ 1 & , \quad x \geqslant 4 \end{cases}$$

Wyznaczyć nośnik oraz funkcję prawdopodobieństwa zmiennej losowej X. Obliczyć $P(X^2 - X = 0)$.

3. Na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdzie $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ oraz $P(\{\omega\}) = \dfrac{1}{4}$ dla każdej $\omega \in \Omega$, określone są zmienne losowe $X(\omega) = \sin \dfrac{\pi\omega}{2}$ i $Y(\omega) = \cos \dfrac{\pi\omega}{2}$. Wyznaczyć ich funkcje prawdopodobieństwa oraz dystrybuanty. Obliczyć $P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = Y(\omega)\})$.

4. Na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdzie $\Omega = [-4; 3]$, a P jest prawdopodobieństwem geometrycznym, określona jest zmienna losowa $X(\omega) = \begin{cases} \omega + 3 & , \quad -4 \leqslant \omega \leqslant -1 \\ 2 & , \quad -1 < \omega \leqslant 0 \\ 2 - \omega & , \quad 0 < \omega \leqslant 2 \\ 0 & , \quad 2 < \omega \leqslant 3 \end{cases}$.

Wyznaczyć $X^{-1}((-\infty; t])$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$, a następnie, na tej podstawie, dystrybuantę zmiennej losowej X.

5. Wśród 10 monet dwie mają orły po obu stronach, reszta jest symetryczna. Losujemy jedną monetę i rzucamy nią do momentu wypadnięcia pierwszego orła, ale nie węcej niż 4 razy. Niech X będzie zmienną losową oznaczającą liczbę rzutów. Wyznaczyć funkcję prawdopodobieństwa zmiennej losowej X, jeśli
   (a) rzucamy do momentu wypadnięcia pierwszego orła;
   (b) rzucamy do momentu wypadnięcia pierwszego orła, ale nie więcej niż trzy razy.

6. Która z poniższych funkcji jest dystrybuantą jednowymiarowej zmiennej losowej?
   (a) $F(t) = \text{arctg(t)}$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$;
   (b) $F(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ 1 - e^{-2t} & , \quad t > 0 \end{cases}$;
   (c) $F(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ \frac{1}{2} & , \quad t = 0 \\ 1 & , \quad t > 0 \end{cases}$;
   (d) $F(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \left(t + \frac{1}{4}\right) & , \quad 0 \leqslant t < 1 \\ 1 & , \quad t > 1 \end{cases}$.