Probabilistyka

Z_8

1. Zmienna losowa X ma rozkład dyskretny taki, że $S_X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ i $P(X = k) = \dfrac{1}{5}$ dla każdego $k \in S_X$. Niech $Y = X^2$. Wykazać, że X i Y są nieskorelowane, ale nie są niezależne.

2. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład jednostajny na zbiorze $D = \{(x, y) : |x| + |y| \leqslant 1\}$. Obliczyć $E(2X + 3Y)$ oraz $V(X + Y)$.

3. Zmienne losowe X i Y są niezależne i każda z nich ma rozkład jednostajny w przedziale $[0; 1]$. Niech $U = \min(X, Y),\ V = \max(X, Y)$. Znaleźć EU oraz $\operatorname{cov}(U, V)$.

4. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład $N\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\right)$. Wyznaczyć $E(X(X + 3Y))$ oraz $V(2Z + T - 3)$, gdzie $Z = 2X + Y$, $T = 2X - Y$.

5. Wektor (X, Y) ma rozkład dyskretny o dystrybuancie

$$F_{XY}(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \quad \vee \quad y < 0 \\ 1/4, & x \in [0; 2) \quad \wedge \quad y \in [0; 1) \\ 1/2, & x \in [0; 2) \quad \wedge \quad y \geqslant 1 \\ 3/4, & x \geqslant 2 \quad \wedge \quad y \in [0; 1) \\ 1, & x \geqslant 2 \quad \wedge \quad y \geqslant 1 \end{cases}.$$

   Wyznaczyć funkcję prawdopodobieństwa wektora (X, Y). Obliczyć $\operatorname{cov}(X + 4Y, 2X - 4Y)$.

6. Dionizy chodzi na siłownię i na basen. Niech X i Y oznaczają liczbę wizyt Dionizego w ciągu tygodnia odpowiednio na siłowni i na basenie. Rozkład zmiennej losowej (X, Y) jest następujący:

$X \setminus Y$	0	1	2
1	0,1	0,1	0,2
2	0,1	0,2	0,3

   (a) Sprawdzić, czy X i Y sk skorelowane. Jeśli tak, w jakim kierunku i w jakim stopniu?

   (b) Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję łącznej liczby wizyt Dionizego na siłowni i na basenie w ciągu tygodnia.

7. Ze zbioru $\{0, 1, 2, 3\}$ losujemy dwie liczby. Niech X oznacza pierwszą wylosowaną liczbę, a Y drugą. Wyznaczyć współczynnik korelacji zmiennych losowych X i Y, jeśli

   (a) losujemy ze zwracaniem;

   (b) losujemy bez zwracania.

8. Wykazać, że jeśli $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ jest próbą o liczności n, to

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x})(y_k - \overline{y}) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x}) \cdot y_k = \sum_{k=1}^{n} (y_k - \overline{y}) \cdot x_k.$$