Probabilistyka

Z_4

1. W urnie są 4 kule białe i 2 czarne. Losujemy jedną kulę, wkładamy ją z powrotem do urny dokładając również jedną kulę w tym samym kolorze, co wylosowana. Następnie znów losujemy jedną kulę. Niech X oznacza liczbę wylosowanych białych kul w dwóch losowaniach. Wyznaczyć funkcję prawdopodobieństwa zmiennej losowej X oraz obliczyć $E(X^2 - X + 1)$.

2. Zmienna losowa X ma rozkład dyskretny taki, że $S_X = \{-1, 0, k\}$ oraz
$$P(X = -1) = \frac{1}{3},\ P(X = 0) = \frac{1}{3k},\ P(X = k) = \frac{1}{k},$$
gdzie k jest pewną liczbą rzeczywistą. Wyznaczyć stałą k oraz obliczyć $V(3X + 1)$.

3. Staż pracy (w latach) pracowników pewnej firmy jest zmienną losową X o gęstości
$$f_X(x) = cx^2 \cdot \mathbf{1}_{[0;6]}(x),$$
gdzie c jest pewną liczbą rzeczywistą.
   (a) Wyznaczyć stałą c oraz dystrybuantę zmiennej losowej X;
   (b) Obliczyć prawdopodobieństwo, że staż pracy losowo wybranego pracownika tej firmy jest krótszy niż 2 lata;
   (c) Jaki jest średni staż pracy pracowników tej firmy? Ile wynosi odchylenie standardowe tego stażu pracy?

4. Wykazać, że nie istnieje EX, jeśli:
   (a) X jest zmienną losową o rozkładzie Cauchy'ego z gęstością
$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)} \text{ dla } x \in \mathbb{R};$$
   (b) X ma rozkład dyskretny taki, że $S_X = \{1, -2, 3, -4, 5, -6, ...\}$ oraz
$$P(X = k) = \frac{6}{k^2 \cdot \pi^2} \text{ dla } k \in S_X.$$

5. Dwaj studenci umówili się na Placu Politechniki między godziną 16^{00} i 17^{00}. Niech T oznacza czas oczekiwania osoby, która przyszła pierwsza, na drugą. Wyznaczyć średnią wartość zmiennej losowej T.

6. Zmienna losowa X ma rozkład ciągły o gęstości
$$f_X(x) = \mathbf{1}_{[0;1]}(x).$$
Wartości X i $\frac{1}{2}$ dzielą przedział $[0; 1]$ na trzy odcinki. Znaleźć średnią długość każdego z nich.