Metody Probabilistyczne i Statystyka

Z_{6-7}

1. Na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdzie $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ oraz $P(\{k\}) = 0.1$ dla każdego $k \in \Omega$, określone są zmienne losowe:

$$X(k) = \cos(k\pi)\,,\; Y(k) = \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right).$$

Wyznaczyć funkcję prawdopodobieństwa wektora (X, Y). Obliczyć $P(X = Y)$.

2. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład dyskretny dany tabelą:

$X \setminus Y$	-1	0	1
0	0.1	0.1	0
1	0.2	0.2	0.1
2	0.1	0.1	0.1

Wyznaczyć rozkłady brzegowe. Obliczyć wartości dystrybuanty zmiennej losowej (X, Y) w punktach: $(1, 0)$, $(2, -1)$. Obliczyć $P(X > 2Y)$.

3. Dystrybuanta dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y) dana jest wzorem

$$F(x, y) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{y}\right) & x \geqslant 2 \;\wedge\; y \geqslant 2 \\ 0 & x < 2 \;\vee\; y < 2 \end{cases}.$$

Wyznaczyć dystrybuanty brzegowe. Obliczyć prawdopodobieństwa:
$P(X > 2)$, $P(1 < X \leqslant 3, 1 < Y \leqslant 4)$, $P(X = 2, Y = 2)$.

4. Wektor (X, Y) ma rozkład ciągły o gęstości

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} a & , \; -2 \leqslant x \leqslant 0 \;\wedge\; 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ 1/2 & , \; 0 < x \leqslant 1 \;\wedge\; 0 < y \leqslant 1 \\ 0 & , \; \text{w p.p.} \end{cases},$$

gdzie a jest pewną liczbą rzeczywistą. Wyznaczyć stałą a. Obliczyć $F_{XY}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

5. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład ciągły o gęstości

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} e^{-y} & , \; x \geqslant 0 \;\wedge\; y \geqslant x \\ 0 & , \; \text{w p.p.} \end{cases}.$$

Wyznaczyć gęstości brzegowe. Obliczyć $P(X + Y \leqslant 2)$.

6. Na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdzie $\Omega = [0; 2]$, a P jest prawdopodobieństwem geometrycznym, określone są zmienne losowe:

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & , \; \omega \in [0; 1) \\ 1 & , \; \omega = 1 \\ 2 & , \; \omega \in (1; 2] \end{cases}, \qquad Y(\omega) = \begin{cases} -1 & , \; \omega \in [0; 1.5] \\ 1 & , \; \omega \in (1.5; 2] \end{cases}.$$

Wyznaczyć funkcję prawdopodobieństwa rozkładu zmiennej losowej (X, Y). Sprawdzić, czy zmienne losowe X i Y są niezależne.

7. Pewna firma komputerowa prowadzi działałnośźć w Warszawie i poza Warszawą. Niech X i Y oznaczają liczbę kontraktów zawieranych przez firmę w ciągu tygodnia odpowiednio w Warszawie i poza Warszawą. Wtedy zmienna losowa (X, Y) ma rozkład dyskretny o funkcji prawdopodobieństwa danej w tabeli

$X \setminus Y$	0	1	2
0	a	$2a$	$3a$
1	b	c	d

.

gdzie a, b, c, d są liczbami z przedziału $(0; 1)$. Wiadomo, że zmienne losowe X i Y są niezależne oraz $P(X = 0) = 2 \cdot P(X = 1)$. Wyznaczyć a, b, c, d.

8. X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $X \sim U([0; 2])$, $Y \sim U([0; 1])$. Obliczyć $P(Y < X^2)$.

9. Niech X i Y oznaczają czas pracy (w dniach) dwóch serwerów na uczelni. Z doświadczenia wynika, że wektor (X, Y) ma rozkład ciągły z gęstością

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-x-y} & , \quad x > 0,\ y > 0 \\ 0 & , \quad \text{w p.p.} \end{cases} .$$

   (a) Sprawdzić, czy zmienne losowe X i Y są niezależne.
   (b) Obliczyć $P(1 < X \leqslant 3, 1 \leqslant Y < 2)$ oraz $P(Y > 1 | X \leqslant 2)$.
   (c) Obliczyć prawdopodobieństwo, że łączny czas pracy obu serwerów będzie przekraczał 100 dni.

10. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład normalny o gęstośkci

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{6\pi} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{36}\left[10x^2 + 4x(y+1) + 4(y+1)^2\right]\right\}.$$

Wyznaczyć gęstości rozkładów brzegowych. Czy X i Y są niezależne?