

# Metody Probabilistyczne i Statystyka

$Z_0$

## 1. Przeciwobrazy

**Definicja 1.** Niech  $f : X \rightarrow Y$  będzie funkcją określoną na zbiorze  $X$ , o wartościach w zbiorze  $Y$ . Przeciwobrazem zbioru  $C \subset Y$  nazywamy zbiór

$$f^{-1}(C) = \{x \in X : f(x) \in C\}.$$

**Zad 1.** Niech  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją taką, że  $f(x) = x^2$ . Wyznaczyć:

$$f^{-1}([0; 4]), \quad f^{-1}((-2; -1)) \quad f^{-1}((0; 1]).$$

**Zad 2.** Dla podanych poniżej funkcji  $f$  wyznaczyć  $f^{-1}((-\infty; t])$  dla każdego  $t \in \mathbb{R}$ :

(a)  $f : \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos x;$

(b)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|;$

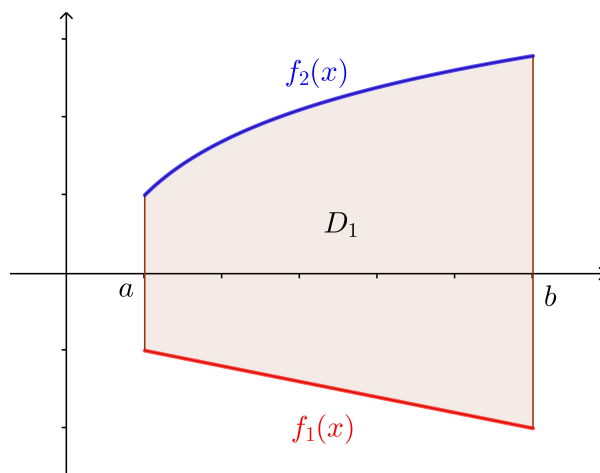
(c)  $f : [-1; 3] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 3/2 & , \quad x = -1 \\ x^2 & , \quad x \in (-1; 0) \\ x & , \quad x \in [0; 1] \\ 1 & , \quad x \in (1; 2) \\ 2 & , \quad x \in [2; 3] \end{cases}.$

## 2. Całka podwójna

**Definicja 2.** Zbiór  $D_1 \subset \mathbb{R}^2$  nazywamy **obszarem normalnym** względem osi  $OX$ , jeśli

$$D_1 = \{(x, y) : a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\},$$

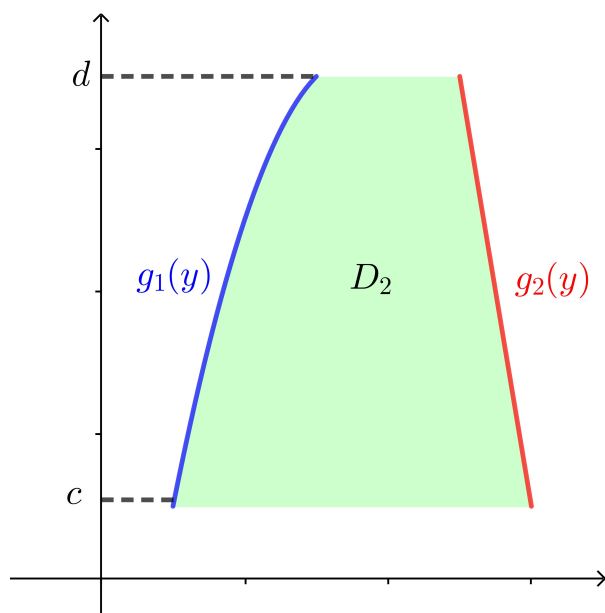
gdzie  $f_1$  i  $f_2$  są funkcjami ciągłymi w przedziale  $[a; b]$ .



**Definicja 3.** Zbiór  $D_2 \subset \mathbb{R}^2$  nazywamy **obszarem normalnym** względem osi  $OY$ , jeśli

$$D_2 = \{(x, y) : c \leq y \leq d, g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\},$$

gdzie  $g_1$  i  $g_2$  są funkcjami ciągłymi w przedziale  $[c; d]$ .



**Uwagi:**

- Jeśli funkcja  $f$  jest ciągła w obszarze normalnym  $D_1$ , to

$$\iint_{D_1} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy \right) dx \stackrel{\text{ozn.}}{=} \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy.$$

- Jeśli funkcja  $f$  jest ciągła w obszarze normalnym  $D_2$ , to

$$\iint_{D_2} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx \right) dy \stackrel{\text{ozn.}}{=} \int_c^d dy \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx.$$

Powyższe całki nazywamy **całkami iterowanymi**.

**Zad 3.** Obliczyć całki:

- (a)  $\iint_D xy dx dy$ , gdzie  $D = [0; 2] \times [1; 4]$ ;
- (b)  $\iint_D 3 dx dy$ , gdzie  $D$  jest obszarem ograniczonym prostymi  $x = 2$ ,  $y = 1$ ,  $y = 2$ ,  $y - x = 2$ .

**Zad 4.** Przedstawić w postaci całek iterowanych całkę  $\iint_D f(x, y) dx dy$ , jeśli:

- (a)  $D$  jest obszarem ograniczonym prostymi  $x = 2$ ,  $y = 2x$  oraz krzywą  $xy = 1$ ;
- (b)  $D$  jest obszarem ograniczonym prostymi  $y = x$ ,  $y = 2x$ ,  $x + y = 6$ .

**2.1 Zamiana zmiennych na współrzędne biegunowe:**  $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$ .

Odpowiednikiem koła  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$  jest we współrzędnych biegunowych prostokąt  $\Delta = \{(\varphi, r) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq R\}$ . Wtedy

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

**Zad 5.** Wprowadzając współrzędne biegunowe obliczyć całkę  $\iint_D x \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy$ , gdzie  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0, y \geq x\}$ .