Analiza 2 – Inżynieria Biomedyczna

Z_4

1. Obliczyć całkę krzywoliniową skierowaną $\int\limits_{\widehat{AB}} (e^x + y)dx + x(y - x)dy$

   od $A = (0, 0)$ do $B = (2, 1)$, gdy $\widehat{AB}$ jest

   (a) odcinkiem $\overline{AB}$;

   (b) łukiem paraboli $4y = x^2$;

   (c) łukiem paraboli $x = 2y^2$.

2. Obliczyć całkę krzywoliniową skierowaną, korzystając z zamiany na całkę oznaczoną

   (a) $\int\limits_{\widehat{AB}} x^3dx + y^3dy$, gdzie $\widehat{AB}$ – górny łuk elipsy $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ o początku w punkcie $A = (-2, 0)$ i końcu $B = (2, 0)$;

   (b) $\oint\limits_C \cos(x+y)dx+ydy$, gdzie C jest brzegiem trójkąta o wierzchołkach $(0, 0), (\frac{\pi}{2}, 0), (0, \frac{\pi}{2})$ skierowanym dodatnio względem wnętrza.

3. Korzystając z tw. Greena obliczyć całki krzywoliniowe skierowane,

   zakładając, że wszystkie krzywe są skierowane dodatnio względem odpowiedniego obszaru.

   (a) $\oint\limits_C (2x^2 + y^2 - y)dx + (x^2 - y^2)dy, \quad C: \ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1;$

   (b) $\oint\limits_C \Big(3y^2 - \dfrac{y}{x^2 + y^2}\Big)dx + \dfrac{x}{x^2 + y^2}dy, \ \ C: \ x^2 + (y + 3)^2 = 4;$

   (c) $\oint\limits_C \Big(x\sqrt{x^2 + y^2} + 2xy\Big)dx + y\sqrt{x^2 + y^2}dy$, gdzie C jest brzegiem obszaru $\overline{D} = \{(x, y) : x \in [1, 3], \ |x - 2| \leqslant y \leqslant 1\}$.

4. Sprawdzić tezę tw. Greena dla całki

   (a) $\oint\limits_C (xy - x)dx + (y - x^2)dy$, gdzie C jest brzegiem kwadratu $\overline{D} = [0, 1] \times [0, 1]$;

   (b) $\oint\limits_C (x + y)(x - y)dx$, gdzie C jest brzegiem tej ćwiartki koła $x^2 + y^2 \leqslant 9$, na brzegu której leżą punkty $(1, 1)$ i $(0, 3)$.