Szeregi Taylora i Maclaurina

Niech $f : D_f \to \mathbb{R}$. Zakładamy, że $x_0 \in D_f$ i w pewnym otoczeniu $Q(x_0, r)$ funkcja f posiada pochodne wszystkich rzędów (ozn. $f \in C^\infty(Q(x_0, r))$). Wówczas dla każdej liczby naturalnej n można napisać wzór Taylora dla funkcji f i punktu x_0 tzn.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n = S_n(x) + R_n(x)$$

dla pewnego c między x i x_0.

Przechodząc do granicy $n \to \infty$ dostaniemy

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \lim_{n\to\infty} R_n(x)$$

Uwaga 1. Jeśli dla x z pewnego otoczenia punktu x_0 $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, to

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad (*)$$

Szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$

nazywamy **szeregiem Taylora** funkcji f w otoczeniu punktu x_0.

Równość (*) nazywamy **rozwinięciem** funkcji f **w szereg Taylora** w otoczeniu punktu x_0.

Dla $x_0 = 0$ równość przyjmuje postać $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Jest to **szereg Maclaurina** funkcji f.

Uwaga 2. Jeżeli w pewnym otoczeniu $Q(x_0, r)$ wszystkie pochodne funkcji f są ograniczone tzn. istnieje liczba $M > 0$ taka, że $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in Q(x_0, r)\quad |f^{(n)}(x)| \leqslant M$, to $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, więc prawdziwa jest dla funkcji f równość (*).

Uwaga 3. Rozwinięcie funkcji f w szereg Taylora w otoczeniu punktu x_0 jest jednoznaczne tzn., jeżeli w pewnym otoczeniu punktu x_0 zachodzi równość

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, to $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ dla każdego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Przykład 1. Na poprzednim wykładzie wykazane zostało, że

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Znamy więc rozwinięcie w szereg Maclaurina funkcji $f(x) = e^x$.

Dla tego szeregu mamy $a_n = \dfrac{1}{n!}$.

A stąd zgodnie z uwagą 3. mamy $a_n = \dfrac{1}{n!} = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$,

czyli wartości pochodnych $f^{(n)}(0) = 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ dla $f(x) = e^x$.

Przykład 2. Wyznaczymy rozwinięcie w szereg Maclaurina funkcji $f(x) = e^{-x}$.

Wykorzystamy rozwinięcie $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.

Jest ono prawdziwe dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$, będzie również prawdziwe, gdy w miejsce zmiennej x wstawimy $-x$.

Dostaniemy $e^{-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-x)^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{n!}$.

Dla otrzymanego szeregu mamy $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}$,

a stąd na podstawie jednoznaczności rozwinięcia mamy $\dfrac{(-1)^n}{n!} = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$,

więc wartości pochodnych w $x_0 = 0$ funkcji $f(x) = e^{-x}$ są równe $f^{(n)}(0) = (-1)^n$.

Przykład 3. Wyznaczymy rozwinięcie w szereg Taylora funkcji $f(x) = e^x$ wokół punktu $x_0 = 2$.

Szukane rozwinięcie będzie miało postać: $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(2)(x-2)^n}{n!}$.

Mamy $e^x = e^{x-2+2} = e^2 \cdot e^{x-2}$.

Wykorzystamy rozwinięcie z przykładu 1. wstawiając w miejsce x wyrażenie $x - 2$.

$$e^x = e^2 \cdot e^{x-2} = e^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2 \cdot (x-2)^n}{n!}.$$

Otrzymany szereg jest zbieżny dla $x \in \mathbb{R}$ podobnie jak szereg z przykładu 1.

Można też było zauważyć, że dla funkcji $f(x) = e^x$ mamy $f^{(n)}(x) = e^x$.

Stąd $f^{(n)}(2) = e^2$ i po wstawieniu wartości pochodnych do rozwinięcia uzyskamy ten sam wzór.

Przykład 4. Wyznaczymy rozwinięcie w szereg Maclaurina funkcji $f(x) = (3x - x^2)e^{2x}$.

Wykonamy kilka przekształceń i wykorzystamy wzór $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.

$$(3x - x^2)e^{2x} = (3x - x^2) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = 3x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} - x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3x \cdot (2x)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2 \cdot (2x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 \cdot 2^n \cdot x^{n+1}}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^{n+2}}{n!} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 2^{n-1} \cdot x^n}{(n-1)!} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-2} \cdot x^n}{(n-2)!} = 3x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3 \cdot 2^{n-1} \cdot x^n}{(n-1)!} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-2} \cdot x^n}{(n-2)!} =$$

$$= 3x + \sum_{n=2}^{\infty} \Big(\frac{3 \cdot 2^{n-1} \cdot x^n}{(n-1)!} - \frac{2^{n-2} \cdot x^n}{(n-2)!} \Big) = 3x + \sum_{n=2}^{\infty} \Big(\frac{3 \cdot 2^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{2^{n-2}}{(n-2)!} \Big) \cdot x^n =$$

$$= 3x + \sum_{n=2}^{\infty} \Big(\frac{6 \cdot 2^{n-2}}{(n-1)!} - \frac{2^{n-2}(n-1)}{(n-1)!} \Big) \cdot x^n = 3x + \sum_{n=2}^{\infty} \big(6 - (n-1)\big) \cdot \frac{2^{n-2}}{(n-1)!} x^n =$$

$$= 3x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-2} \cdot (7-n)}{(n-1)!} x^n$$

Przykład 5. Wyznaczymy rozwinięcie w szereg Maclaurina funkcji $f(x) = e^{-x^2}$.

Wykorzystamy rozwinięcie z przykładu 1. wstawiając w miejsce x wyrażenie $-x^2$.

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}.$$

Otrzymany szereg jest zbieżny dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

Widzimy, że w otrzymanym rozwinięciu pojawiają się tylko wyrazy z parzystymi potęgami x.

Oznacza to, że współczynniki dla wyrazów z nieparzystymi potęgami $a_{2n+1} = 0$.

Jednocześnie z jednoznaczności rozwinięcia mamy $a_{2n+1} = \dfrac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} = 0$,

stąd $f^{(2n+1)}(0) = 0$ dla $n = 0, 1, 2 \ldots$.

Współczynniki dla wyrazów z parzystymi potęgami są równe $a_{2n} = \dfrac{(-1)^n}{n!}$.

Z drugiej strony mamy równość $a_{2n} = \dfrac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} = \dfrac{(-1)^n}{n!}$.

Dostajemy więc $f^{(2n)}(0) = \dfrac{(-1)^n (2n)!}{n!}$ dla $n = 0, 1, 2 \ldots$.

W szczególności np. $f^{(10)}(0) = \dfrac{(-1)^5 (10)!}{5!} = -6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$.

Przykład 6. Wyznaczymy rozwinięcie w szereg Maclaurina funkcji $f(x) = \sin x$.

Obliczamy kolejne pochodne funkcji.

$f^{(0)}(x) = \sin x, \quad f^{(0)}(0) = 0,$

$f^{(1)}(x) = \cos x, \quad f^{(1)}(0) = 1,$

$f^{(2)}(x) = -\sin x, \quad f^{(2)}(0) = 0,$

$f^{(3)}(x) = -\cos x, \quad f^{(3)}(0) = -1,$

$f^{(4)}(x) = f^{(0)}(x) = \sin x, \quad f^{(4)}(0) = 0$ dalej pochodne będą się powtarzać.

Możemy zapisać ogólną prawidłowość: $f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{dla } n = 4k; \\ 1, & \text{dla } n = 4k+1; \\ 0, & \text{dla } n = 4k+2; \\ -1, & \text{dla } n = 4k+3. \end{cases}$

Wszystkie pochodne funkcji $\sin x$ są ograniczone $|f^{(n)}(x)| \leqslant 1$, więc zgodnie z uwagą 2. dla $x \in \mathbb{R}$ prawdziwe będzie rozwinięcie

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 + 1 \cdot \frac{x}{1!} + 0 \cdot \frac{x^2}{2!} + (-1) \cdot \frac{x^3}{3!} + 0 \cdot \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Przykład 7. Wyznaczymy rozwinięcie w szereg Maclaurina funkcji $f(x) = \cos x$.

Obliczamy kolejne pochodne funkcji.

$f^{(0)}(x) = \cos x, \quad f^{(0)}(0) = 1,$

$f^{(1)}(x) = -\sin x, \quad f^{(1)}(0) = 0,$

$f^{(2)}(x) = -\cos x, \quad f^{(2)}(0) = -1,$

$f^{(3)}(x) = \sin x, \quad f^{(3)}(0) = 0,$

$f^{(4)}(x) = f^{(0)}(x) = \cos x, \quad f^{(4)}(0) = 1$ dalej pochodne będą się powtarzać.

Możemy zapisać ogólną prawidłowość: $f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1, & \text{dla } n = 4k; \\ 0, & \text{dla } n = 4k+1; \\ -1, & \text{dla } n = 4k+2; \\ 0, & \text{dla } n = 4k+3. \end{cases}$

Wszystkie pochodne funkcji $\cos x$ są ograniczone $|f^{(n)}(x)| \leqslant 1$, więc zgodnie z uwagą 2. dla $x \in \mathbb{R}$ prawdziwe będzie rozwinięcie

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 1 + 0 \cdot \frac{x}{1!} + (-1) \cdot \frac{x^2}{2!} + 0 \cdot \frac{x^3}{3!} + 1 \cdot \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Przykład 8. Wyznaczymy rozwinięcie w szereg Maclaurina funkcji $f(x) = \cos^2 x$ oraz obliczymy jej pochodne $f^{(n)}(0)$.

Wykorzystamy wzór $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$.

Znając szereg Maclaurina dla funkcji $\cos x$, możemy uzyskać rozwinięcie dla funkcji $\cos 2x$ wstawiając w miejsce zmiennej x wyrażenie $2x$. Otrzymamy

$$\cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} x^{2n}.$$

Następnie dostajemy

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = \frac{1}{2}\left(1 + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} x^{2n}\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}.$$

W rozwinięciu występują jedynie parzyste potęgi x, co oznacza, że pochodne nieparzystego rzędu $f^{(2n+1)}(0) = 0$.

Wartości pochodnych parzystego rzędu wyznaczymy z równości $\dfrac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} = a_{2n} = \dfrac{(-1)^n \cdot 2^{2n-1}}{(2n)!}$.

Dostaniemy $f^{(2n)}(0) = (-1)^n \cdot 2^{2n-1}$.

W szczególności mamy np. $f^{(18)}(0) = (-1)^9 \cdot 2^{17} = -2^{17}$.

Przykład 9. Wykorzystując szereg Maclaurina dla funkcji $f(x)=\frac{1}{1-x}$ wyznaczymy wartości pochodnych $f^{(n)}(0)$.

Wiemy, że $\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ dla $x\in(-1,1)$.

Z jednoznaczności rozwinięcia mamy $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=a_n=1$,

a stąd $f^{(n)}(0)=n!$.

Przykład 10. Wyznaczymy rozwinięcie w szereg Taylora funkcji $f(x)=\frac{1}{1-x}$ wokół punktu $x_0=\frac{1}{2}$.

Szukane rozwinięcie będzie miało postać: $\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})^n}{n!}$.

Mamy $\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1-(x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2})}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}-(x-\frac{1}{2})}=\frac{1}{\frac{1}{2}-(x-\frac{1}{2})}=\frac{1}{\frac{1}{2}(1-2(x-\frac{1}{2}))}=$

$\frac{2}{1-2(x-\frac{1}{2})}=2\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\Big(2(x-\frac{1}{2})\Big)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{n+1}(x-\frac{1}{2})^n$.

Wyznaczymy przedział zbieżności otrzymanego szeregu potęgowego.

Współczynniki $a_n=2^{n+1}$.

Obliczamy $\lambda=\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+2}}{2^{n+1}}=2$.

Stąd promień zbieżności $R=\frac{1}{2}$, więc szereg jest zbieżny, gdy $|x-\frac{1}{2}|<\frac{1}{2}$, czyli dla $x\in(0,1)$.

Na krańcach przedziału szereg jest rozbieżny.

Przykład 11. Wyznaczymy rozwinięcie w szereg Maclaurina funkcji $f(x)=\frac{1}{1+x}$, a następnie wykorzystamy twierdzenie o całkowaniu szeregów potęgowych.

$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n$.

Otrzymane rozwinięcie jest prawdziwe dla $x\in(-1,1)$, bo wtedy szereg potęgowy jest zbieżny.

Możemy zastosować twierdzenie o całkowaniu szeregów potęgowych wyraz po wyrazie.

$\int\limits_0^x f(t)dt=\int\limits_0^x\Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nt^n\Big)dt=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^x a_nt^ndt=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}$

$$\int\limits_0^x f(t)dt=\int\limits_0^x\frac{dt}{1+t}=\ln|1+t|\Big|_0^x=\ln|1+x|$$

Z drugiej strony dla szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n$ mamy $a_n=(-1)^n$, więc

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^n}{n}$ – szereg zbieżny dla $x\in(-1,1]$.

Uzyskaliśmy w ten sposób rozwinięcie w szereg Maclaurina funkcji $\ln|1+x|$

$\ln|1+x| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cdot x^n}{n}$ prawdziwe w przedziale $(-1,1]$.

Przykład 12. Wyznaczymy rozwinięcie w szereg Maclaurina funkcji $f(x) = \frac{6x}{(2+x)(4-x)}$.

Na początku zapiszemy funkcję wymierną $f(x)$ jako sumę ułamków prostych.

$$\frac{6x}{(2+x)(4-x)} = \frac{A}{4-x} + \frac{B}{2+x} = \frac{4}{4-x} - \frac{2}{2+x}$$

Wyznaczymy rozwinięcia każdego składnika.

$$\frac{4}{4-x} = \frac{4}{4(1-\frac{x}{4})} = \frac{1}{1-\frac{x}{4}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{4^n} \quad \text{– szereg zbieżny dla } x\in(-4,4).$$

$$\frac{2}{2+x} = \frac{2}{2(1-(-\frac{x}{2}))} = \frac{1}{1-(-\frac{x}{2})} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^n}{2^n} \quad \text{– szereg zbieżny dla } x\in(-2,2).$$

Suma otrzymanych szeregów będzie szeregiem zbieżnym w części wspólnej przedziałów zbieżności, czyli w przedziale $(-2,2)$.

$$\frac{6x}{(2+x)(4-x)} = \frac{4}{4-x} - \frac{2}{2+x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{4^n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{4^n} - \frac{(-1)^n\cdot x^n}{2^n}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4^n} - \frac{(-1)^n}{2^n}\right)\cdot x^n.$$

Przykład 13. Wyznaczymy rozwinięcie w szereg Maclaurina funkcji $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, a następnie wykorzystamy twierdzenie o całkowaniu szeregów potęgowych, aby uzyskać szereg Maclaurina funkcji arctg$x$.

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^{2n} \quad \text{- szereg zbieżny dla } x\in(-1,1).$$

Możemy zastosować twierdzenie o całkowaniu szeregów potęgowych wyraz po wyrazie.

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n\Big)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x\frac{dt}{1+t^2} = \mathrm{arctg}t\Big|_0^x = \mathrm{arctg}x$$

Z drugiej strony

$$\int_0^x\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot t^{2n}\Big)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n\cdot t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

Otrzymany szereg jest zbieżny w przedziale domkniętym $[-1,1]$.

Mamy więc równość $\mathrm{arctg}x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ prawdziwą dla $x\in[-1,1]$.

Jak już dotarliśmy do tego miejsca, to teraz czas na nagrodę.

Wstawmy do równości $x=1$.

Dostaniemy $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \mathrm{arctg}1 = \frac{\pi}{4}$, a stąd $\pi = 4\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Rozwinięcia w szereg Maclaurina najważniejszych funkcji (do zapamiętania)

1. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ – prawdziwe dla każdego $x \in \mathbb{R}$;
2. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ – prawdziwe dla każdego $x \in \mathbb{R}$;
3. $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ – prawdziwe dla każdego $x \in \mathbb{R}$;
4. $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ – prawdziwe dla każdego $x \in (-1, 1)$;
5. $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ – prawdziwe dla każdego $x \in (-1, 1]$.