Całki krzywoliniowe – wiadomości wstępne

Łuk na płaszczyźnie to zbiór punktów (x, y) o współrzędnych $x = x(t),\ y = y(t)$, gdzie $(x(t),\ y(t)$ są funkcjami ciągłymi określonymi na przedziale $[\alpha, \beta]$ bez punktów wielokrotnych.

Układ: $x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]$ – **parametryzacja** łuku.
Punkty: $A = (x(\alpha), y(\alpha))$ i $B = (x(\beta), y(\beta))$ – końce łuku.
Łuk jest **otwarty**, jesli $A \neq B$.
Łuk jest **zamknięty** (jest krzywą zamkniętą, krzywą Jordana), jeśli $A = B$.

Przykład 1. Prawa połowa okręgu $x^2 + y^2 = 4$ ma przykladową parametryzację:
$x(t) = 2\cos t,\ y(t) = 2\sin t,\ t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Jest to łuk otwarty o końcach $A = (0, -2),\ B = (0, 2)$.

Łuk gładki – łuk, dla którego pochodne $x'(t),\ y'(t)$ są ciągłe na $[\alpha, \beta]$ oraz nie są w żadnym punkcie tego przedziału jednocześnie równe zero.

W uproszczeniu łuk gładki, to krzywa, która w szczególności nie ma "zagięć".

Łuk kawałkami gładki – składa się z segmentów, które są łukami gładkimi.

Łukowi można nadać kierunek od A do B (ozn. $\widehat{AB}$) lub odwrotny ($\widehat{BA}$).
Łuk, któremu nadano kierunek, nazywamy **łukiem skierowanym**.
Parametryzacja i kierunek łuku są **zgodne**, jeśli kierunek łuku jest zgodny z kierunkiem wzrostu parametru t. W przeciwnym wypadku parametryzacja jest **niezgodna** z kierunkiem łuku.

Przykład 2. Jeśli łukowi z przykładu 1. nadamy kierunek od A do B, to podana parametryzacja jest zgodna z kierunkiem łuku. Jeśli łukowi nadamy kierunek od B do A, to parametryzacja będzie niezgodna z kierunkiem łuku.

Uwaga 1. Jeżeli parametryzacja łuku $x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]$
jest niezgodna z nadanym mu kierunkiem, to parametryzacja
$\tilde{x} = x(-t), \tilde{y} = y(-t), t \in [-\beta, -\alpha]$ będzie z tym kierunkiem zgodna.

Przykład 3. Jeśli łukowi z przykładu 1. nadamy kierunek od B do A to parametryzacją tego łuku zgodną z jego kierunkiem będzie np. $x(t) = 2\cos t,\ y(t) = -2\sin t,\ t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Obszar w $\mathbb{R}^2$ nazywamy **obszarem jednospójnym**, jeżeli należy do niego wnętrze każdej zawartej w nim krzywej Jordana. Warunek ten oznacza, że obszar jest "bez dziur".

Niech $\overline{D}$ – obszar normalny względem obu osi, ograniczony krzywą Jordana K. Jeśli kierunek krzywej jest określony tak, że poruszając się po K, obszar $\overline{D}$ jest po lewej stronie, to krzywa K jest **skierowana dodatnio** względem swego wnętrza. W przeciwnym razie jest **skierowana ujemnie** względem swego wnętrza.

Całka krzywoliniowa skierowana w $\mathbb{R}^2$

Niech $\widehat{AB}$ – łuk skierowany o parametryzacji $x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]$ zgodnej z jego kierunkiem oraz $[P(x, y); Q(x, y)]$ – para uporządkowana funkcji określonych na tym łuku.

Para funkcji $[P(x, y); Q(x, y)]$ to inaczej pole wektorowe.
Każdemu punktowi łuku zostaje przyporządkowany 2-wymiarowy wektor $\overrightarrow{R} = [P, Q]$.
W uproszczeniu możemy sobie wyobrażać, że w każdym punkcie krzywej (łuku $\widehat{AB}$) mamy zaczepiony wektor $\overrightarrow{R}$ (w każdym punkcie może być inny wektor).

Całka krzywoliniowa będzie określona dla pary obiektów:
łuk skierowany $\widehat{AB}$ i pole wektorowe $\overrightarrow{R} = [P, Q]$ określone na tym łuku.

Konstrukcja całki skierowanej

Niech $n \in \mathbb{N}$ – ustalona liczba naturalna. Dzielimy przedział $[\alpha, \beta]$ na n części punktami
$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \beta$.
Odpowiadają im punkty na łuku: $A_0, A_1, \ldots, A_n$, gdzie $A_k = (x(t_k), y(t_k))$.
W przedziałach $[t_{k-1}, t_k]$ wybieramy punkty τ_k dla kolejnych $k \in \{1, \ldots, n\}$.
W każdym punkcie $\Big(x(\tau_k), y(\tau_k)\Big)$ mamy wektor pola $\overrightarrow{R}$ ozn. $\overrightarrow{R(\tau_k)} = \Big[P\Big(x(\tau_k), y(\tau_k)\Big), Q\Big(x(\tau_k), y(\tau_k)\Big)\Big]$
Tworzymy sumę całkową S_n iloczynów skalarnych $\overrightarrow{R(\tau_k)} \circ \overrightarrow{A_{k-1}A_k}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \Bigg(P\Big(x(\tau_k), y(\tau_k)\Big) \cdot \Big(x(t_k) - x(t_{k-1})\Big) + Q\Big(x(\tau_k), y(\tau_k)\Big) \cdot \Big(y(t_k) - y(t_{k-1})\Big) \Bigg)$$

Fakt. Iloczyn skalarny wektorów $\overrightarrow{u} = (x_u, y_u)$ i $\overrightarrow{v} = (x_v, y_v)$ oblicza się następująco:

$$\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v.$$

Iloczyn skalarny wektorów prostopadłych jest równy 0.

Def.1. Jeżeli dla każdego normalnego ciągu podziałów przedziału $[\alpha, \beta]$ istnieje ta sama granica właściwa $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ – niezależna od sposobów podziału przedziału i wyboru punktów τ_k,
to wartość tej granicy nazywamy ***całką krzywoliniową skierowaną (zorientowaną)*** pary funkcji $[P(x,y); Q(x,y)]$ po łuku $\widehat{AB}$ i oznaczamy

$$\int\limits_{\widehat{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Przy oznaczeniach $[P(x,y); Q(x,y)] \stackrel{ozn}{=} \overrightarrow{R(x,y)}$ oraz $[dx, dy] \stackrel{ozn}{=} \overrightarrow{dl}$ mamy skrócony zapis:

$$\int\limits_{\widehat{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\widehat{AB}} \overrightarrow{R(x,y)} \circ \overrightarrow{dl}$$

Uwaga 2. Własności całki

1. $\int\limits_{\widehat{AB}} \overrightarrow{R(x,y)} \circ \overrightarrow{dl} = -\int\limits_{\widehat{BA}} \overrightarrow{R(x,y)} \circ \overrightarrow{dl}$, (zmiana kierunku łuku powoduje zmianę znaku całki)
2. $\int\limits_{\widehat{AB}} k \cdot \overrightarrow{R(x,y)} \circ \overrightarrow{dl} = k \cdot \int\limits_{\widehat{AB}} \overrightarrow{R(x,y)} \circ \overrightarrow{dl}$, $k \in \mathbb{R}$,
3. $\int\limits_{\widehat{AB}} \Big(\overrightarrow{R_1(x,y)} + \overrightarrow{R_2(x,y)}\Big) \circ \overrightarrow{dl} = \int\limits_{\widehat{AB}} \overrightarrow{R_1(x,y)} \circ \overrightarrow{dl} + \int\limits_{\widehat{AB}} \overrightarrow{R_2(x,y)} \circ \overrightarrow{dl}$.

Uwaga 3. Jeżeli $\overrightarrow{R(x,y)}$ jest wektorem siły o zmiennych współrzędnych wzdłuż łuku $\widehat{AB}$, to całka $\int\limits_{\widehat{AB}} \overrightarrow{R(x,y)} \circ \overrightarrow{dl}$ przedstawia pracę siły $\overrightarrow{R}$ wzdłuż łuku $\widehat{AB}$.

Jeżeli całkę krzywoliniową obliczamy po łuku zamkniętym K, to zamiast symbolu $\int\limits_{\widehat{AB}}$ używamy symbolu $\oint\limits_{K}$ (zaznaczając ew. strzałką w kółeczku skierowanie krzywej.

Na podstawie definicji i podanych wyżej faktów nie jesteśmy w większości przypadków w stanie stwierdzić, czy dana całka krzywoliniowa istnieje, ani podać jej wartości. Do tego celu bardzo przydatne będzie poniższe twierdzenie.

Tw.1. O zamianie całki krzywoliniowej skierowanej na całkę oznaczoną

Jeżeli funkcje $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ są ciągłe na łuku gładkim $\widehat{AB}$ o parametryzacji
$x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]$ zgodnej z kierunkiem tego łuku, to

$$\int\limits_{\widehat{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Big(P\big(x(t), y(t)\big) \cdot x'(t) + Q\big(x(t), y(t)\big) \cdot y'(t)\Big) dt.$$

Uwaga 4. Wartość całki krzywoliniowej skierowanej zależy (na ogół) od kształtu drogi całkowania.

Przykład 4. Obliczyć całkę krzywoliniową skierowaną $\int\limits_{\widehat{AB}} 2xydx + ydy$ po łuku $\widehat{AB}$.

1. $\widehat{AB}$ – ćwierć łuku okręgu $x^2 + y^2 = 1$ od $A = (1, 0)$ do $B = (0, 1)$.

   Parametryzacja łuku: $x(t) = \cos t,\ y(t) = \sin t,\ t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (zgodna z kierunkiem łuku)

   Obliczamy $x'(t) = -\sin t,\quad y'(t) = \cos t$ i korzystamy z tw. 1.

$$\int\limits_{\widehat{AB}} 2xydx + ydy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(2\cos t \cdot \sin t \cdot (-\sin t) + \sin t \cdot \cos t\Big) dt =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (-2\sin^2 t \cos t + \frac{1}{2}\sin 2t)dt = \qquad \text{(podstawienie } u = \sin t, \quad du = \cos t dt)$$

$$= \int\limits_0^1 -2u^2 du + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = \frac{-2u^3}{3}\Big|_0^1 + (-\frac{1}{4}\cos 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

2. $\widehat{AB}$ – odcinek od $A = (1, 0)$ do $B = (0, 1)$.

   Odcinek jest fragmentem prostej $y = 1 - x$.
   Parametryzacja łuku: $x(t) = t,\quad y(t) = 1 - t,\quad t \in [0; 1]$ (niezgodna z kierunkiem łuku)

   Obliczamy $x'(t) = 1,\quad y'(t) = -1$ i korzystamy z tw. 1.

   Przed całką będzie znak $-$, bo parametryzacja niezgodna z kierunkiem łuku.

$$\int\limits_{\widehat{AB}} 2xydx + ydy = -\int\limits_0^1 \Big(2t(1-t) \cdot 1 + (1-t)\cdot(-1)\Big) dt =$$

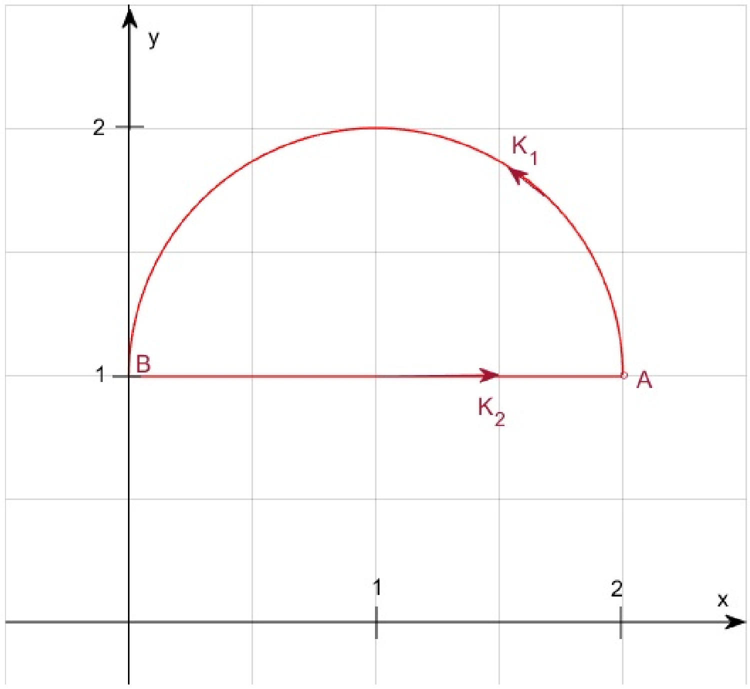
$$= -\int\limits_0^1 (3t - 2t^2 - 1)dt = -\Big(\frac{3t^2}{2} - \frac{2t^3}{3} - t\Big)\Big|_0^1 = -\Big(\frac{3}{2} - \frac{2}{3} - 1\Big) = \frac{1}{6}.$$

Uwaga 5. Jeżeli krzywa $K = \sum\limits_{k=1}^{n} K_i$ jest sumą łuków gładkich, to całkę skierowaną pary funkcji $[P(x, y); Q(x, y)]$ po łuku K określamy jako

$$\int\limits_K P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \sum_{k=1}^{n}\Big(\int\limits_{K_i} P(x, y)dx + Q(x, y)dy\Big).$$

Uwaga 6. Twierdzenie o zamianie całki krzywoliniowej na całkę oznaczoną pozostaje prawdziwe dla krzywych zamkniętych.

Przykład 5. Obliczyć całkę $\oint\limits_K y dx - x dy$ po brzegu górnej połowy koła $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 1$ zorientowanym dodatnio względem wnętrza.



Obliczymy całkę po łuku zamkniętym K, który jest sumą dwóch łuków gładkich:

K_1 – górna połowa okręgu od punktu $A = (2,1)$ do $B = (0,1)$

K_2 – odcinek od $B = (0,1)$ do $A = (2,1)$.

Wykorzystamy Uwagę 5. $\oint\limits_K y dx - x dy = \int\limits_{K_1} y dx - x dy + \int\limits_{K_2} y dx - x dy.$

Parametryzacja K_1: $x(t) = 1 + \cos t,\ y(t) = 1 + \sin t,\ t \in [0, \pi]$, (zgodna z kierunkiem łuku)

$x'(t) = -\sin t,\ y'(t) = \cos t$

$$\int\limits_{K_1} y dx - x dy = \int\limits_0^\pi \Big((1+\sin t)(-\sin t) - (1+\cos t)\cos t\Big) dt =$$

$$= \int\limits_0^\pi \Big(-\sin t - \sin^2 t - \cos t - \cos^2 t\Big) dt = \int\limits_0^\pi (-1 - \sin t - \cos t) dt = (-t + \cos t - \sin t)\Big|_0^\pi = -\pi - 2$$

Parametryzacja K_2: $x(t) = t,\ y(t) = 1,\ t \in [0;2]$ (zgodna z kierunkiem łuku)

$x'(t) = 1,\ y'(t) = 0 \quad \int\limits_{K_2} y dx - x dy = \int\limits_0^2 (1 \cdot 1 - t \cdot 0) dt = \int\limits_0^2 dt = 2$

Ostatecznie $\oint\limits_K y dx - x dy = -\pi - 2 + 2 = -\pi.$

Tw.2. (Greena) Jeżeli $\overline{D}$ jest obszarem regularnym, K jest brzegiem tego obszaru, skierowanym dodatnio względem wnętrza, a funkcje $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ są klasy C^1 w tym obszarze, to prawdziwy jest wzór

$$\oint_K P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_{\overline{D}} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)dxdy.$$

Przykład 6. Obliczyć całkę $\oint_K ydx + 2xdy$, gdzie K jest dodatnio skierowanym brzegiem kwadratu $\overline{D}$ o wierzchołkach $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$.

Spełnione są założenia Tw. Greena: krzywa K jest brzegiem obszaru regularnego,
funkcje $P(x,y) = y$ oraz $Q(x,y) = 2x$ są klasy C^1 w tym obszarze (bo są wielomianami),
więc prawdziwa będzie teza: $\oint_K P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_{\overline{D}} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)dxdy.$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 1$

$\iint_{\overline{D}} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)dxdy = \iint_{\overline{D}} (2-1)dxdy = \iint_{\overline{D}} dxdy = 1$ (pole kwadratu)

Przykład 7. Obliczyć całkę $\oint_K (2x^3 - 11y)dx + (4x + \sin y)dy$, gdzie K jest okręgiem $x^2 + y^2 = 3$ dodatnio skierowanym względem wnętrza.

Wykorzystamy tw. Greena (założenia są spełnione).

$P(x,y) = 2x^3 - 11y$ oraz $Q(x,y) = 4x + \sin y$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 4, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -11$

$\iint_{\overline{D}} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)dxdy = \iint_{\overline{D}} (4-(-11))dxdy = \iint_{\overline{D}} 15dxdy =$

$= 15\iint_{\overline{D}} dxdy = 15 \cdot (pole\ kola) = 15 \cdot 3\pi = 45\pi$

Obliczenie tej całki poprzez zamianę na całkę oznaczoną byłoby bardziej pracochłonne.

Przykład 8. Sprawdzić tezę Tw. Greena dla całki z przykładu 5.

Należy sprawdzić równość $\oint_K P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_{\overline{D}} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)dxdy.$

Wiemy, że $\oint_K ydx - xdy = -\pi$

Obliczymy całkę z prawej strony równości.

$P(x,y) = y$ oraz $Q(x,y) = -x, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 1$

$$\iint\limits_{\overline{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint\limits_{\overline{D}} (-1-1)dxdy = -2 \iint\limits_{\overline{D}} dxdy = -2 \cdot |\overline{D}| = -2 \cdot \frac{1}{2}\pi = -\pi.$$

($|\overline{D}| = \frac{1}{2}\pi$ - pole połowy koła o promieniu 1)

Uzyskany wynik jest identyczny, jak dla całki krzywoliniowej.

Należało się tego spodziewać, bo założenia Tw. Greena są spełnione, więc teza musi być prawdziwa.

Uwaga 7. W przypadku, gdy $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ oraz założenia Tw. Greena są spełnione otrzymamy

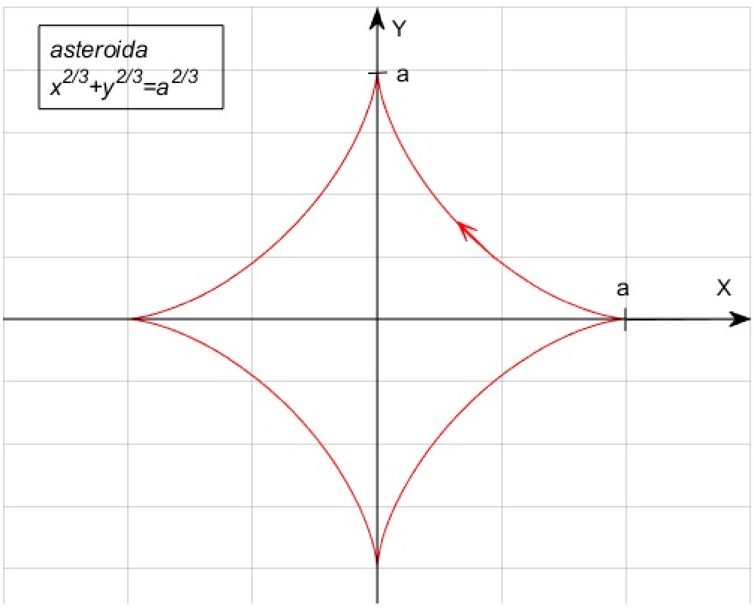
$\oint\limits_K P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{\overline{D}} 1dxdy = |\overline{D}|$ – pole obszaru $\overline{D}$.

Możemy więc wykorzystać całkę krzywoliniową skierowaną do obliczenia pola obszaru ograniczonego krzywą.

Uwaga 8. Pole obszaru $\overline{D}$ ograniczonego zamkniętą kawałkami gładką krzywą K wyraża się wzorem

$$|\overline{D}| = \oint\limits_K xdy = -\oint\limits_K ydx = \frac{1}{2}\oint\limits_K (xdy - ydx)$$

Przykład 9. Obliczyć pole obszaru ograniczonego asteroidą o parametryzacji:
$x(t) = a\cos^3 t,\ y(t) = a\sin^3 t,\ t \in [0, 2\pi],\ a \in \mathbb{R}_+$ – ustalona liczba.



Wykorzystamy wzór $|\overline{D}| = \frac{1}{2}\oint\limits_K (xdy - ydx)$ i zamianę całki skierowanej na całkę oznaczoną.

$x'(t) = 3a\cos^2 t(-\sin t), \quad y'(t) = 3a\sin^2 t\cos t$

$|\overline{D}| = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \Big(a\cos^3 t \cdot 3a\sin^2 t\cos t - a\sin^3 t \cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)\Big)dt =$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3a^2(\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t)dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3a^2\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)dt =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t dt = \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}(2\cos t\sin t)^2 dt = \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}(\sin 2t)^2 dt =$$

$$= \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1-\cos 4t)dt = \frac{3a^2}{16}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)dt = \frac{3a^2}{16}(t - \frac{1}{4}\sin 4t)\Big|_0^{2\pi} = \frac{3a^2}{16}\cdot 2\pi = \frac{3}{8}a^2\pi.$$

Tw. 3. Jeżeli funkcje $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ są klasy C^1 na obszarze jednospójnym D, to następujące warunki są równoważne:

1. $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$
2. $\oint\limits_K P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ dla każdej krzywej Jordana K kawałkami gładkiej leżącej w obszarze D
3. wartość $\int\limits_{\widehat{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ nie zależy od wyboru drogi całkowania łączącej A z B zawartej w obszarze D
4. istnieje funkcja $U(x,y)$ (potencjał) taka, że $\dfrac{\partial U}{\partial x} = P(x,y)$, $\dfrac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y)$.
   Dla $A, B \in D$ zachodzi równość $\int\limits_{\widehat{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = U(B) - U(A)$,
   gdzie $U(x,y)$ jest dowolnym potencjałem.

Uwaga 9. Potencjał można obliczyć z następującego wzoru:

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)dt + C,$$

gdzie $(x_0, y_0) \in \overline{D}$, C – dowolna stała.

Przykład 10. Wykazać niezależność całki od drogi całkowania i obliczyć
$\int\limits_{\widehat{AB}}(3y\sin 3x + \cos x)dx + (2y - \cos 3x)dy$
po dowolnym łuku łączącym punkty $A = (-\frac{\pi}{6}, -1)$ i $B = (\frac{\pi}{3}, 1)$.

Korzystamy z tw. 3.

$P(x,y) = 3y\sin 3x + \cos x$, $\quad Q(x,y) = 2y - \cos 3x$ — są to funkcje klasy C^1 na $\mathbb{R}^2$,

jako złożenie wielomianów i funkcji sinus oraz cosinus.

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = 3\sin 3x$, $\quad \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 3\sin 3x$ pochodne równe, więc spełniony warunek 1.

Jest on równoważny niezależności całki od drogi całkowania.

Obliczenie całki:

Sposób 1.

Wybieramy łuk łączący punkty A i B tak, aby łatwo się całkowało:

$\widehat{AB}$ – suma dwóch odcinków: $\overline{AC}$ – poziomy w prawo, $\overline{CB}$ – pionowy w górę, gdzie $C = (\frac{\pi}{3}, -1)$.

$$\int\limits_{\widehat{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\overline{AC}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int\limits_{\overline{CB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Całka po poziomym odcinku $\overline{AC}$:

Parametryzacja: $x(t) = t,\ y(t) = -1,\quad t \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}],\quad x'(t) = 1,\quad y'(t) = 0$

Ponieważ $y'(t) = 0$, dla całki po odcinku poziomym będzie:

$$\int\limits_{\overline{AC}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\overline{AC}} P(x,y)dx = \int\limits_{\overline{AC}} (3y\sin 3x + \cos x)dx =$$

(zamiana na całkę oznaczoną)

$$= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (-3\sin 3t + \cos t)dt = (\cos 3t + \sin t)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \cos\pi - \cos(-\tfrac{\pi}{2}) + \sin\tfrac{\pi}{3} - \sin(-\tfrac{\pi}{6}) =$$

$$= -1 + \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Całka po pionowym odcinku $\overline{CB}$:

Parametryzacja: $x(t) = \frac{\pi}{3},\ y(t) = t,\quad t \in [-1,\ 1],\quad x'(t) = 0,\quad y'(t) = 1$

Ponieważ $x'(t) = 0$, dla całki po odcinku pionowym będzie:

$$\int\limits_{\overline{CB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\overline{CB}} Q(x,y)dy = \int\limits_{\overline{CB}} (2y - \cos 3x)dy =$$

(zamiana na całkę oznaczoną)

$$= \int_{-1}^{1} (2t - \cos\pi)dt = (t^2 + t)\Big|_{-1}^{1} = 0 + 2 = 2$$

Ostatecznie

$$\int\limits_{\widehat{AB}} (3y\sin 3x + \cos x)dx + (2y - \cos 3x)dy = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + 2 = \frac{\sqrt{3}+3}{2}.$$

Sposób 2.

Wykorzystamy potencjał (z warunku 4. z Tw. 3).

Istnieje funkcja $U(x,y)$ (potencjał) taka, że $\dfrac{\partial U}{\partial x} = P(x,y),\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y)$.

Zachodzi równość $\displaystyle\int\limits_{\widehat{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = U(B) - U(A)$,

gdzie $U(x,y)$ jest dowolnym potencjałem.

Potencjał wyznaczymy z warunków:

(I) $\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x} = P(x,y) = 3y\sin 3x + \cos x,$

(II) $\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y} = Q(x,y) = 2y - \cos 3x.$

Z warunku (I) dostaniemy $U(x,y) = -y\cos 3x + \sin x + f(y),$

dla tak otrzymanej funkcji obliczamy

$\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y} = -\cos 3x + f'(y)$

i wstawiamy do warunku (II): $-\cos 3x + f'(y) = 2y - \cos 3x.$

Stąd $f'(y) = 2y,$

więc $f(y) = y^2 + C,$ gdzie C jest dowolną stałą rzeczywistą.

Otrzymaliśmy potencjał $U(x,y) = -y\cos 3x + \sin x + y^2 + C.$

Obliczamy wartość całki

$\displaystyle\int\limits_{\widehat{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = U(B) - U(A) = U(\frac{\pi}{3},1) - U(-\frac{\pi}{6},-1) =$

$= -\cos\pi + \sin\frac{\pi}{3} + 1^2 + C - (\cos\frac{\pi}{2} + \sin(-\frac{\pi}{6}) + (-1)^2 + C) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + C - 0 + \frac{1}{2} - 1 - C = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}.$

Sposób 3.

Potencjał obliczymy ze wzoru z uwagi 9.

$$U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t,y)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,t)dt + C,$$

gdzie $(x_0,y_0) \in \overline{D},$ C – dowolna stała.

Ustalmy $x_0 = 0,$ $y_0 = 0.$ Wtedy

$U(x,y) = \displaystyle\int\limits_0^x P(t,y)dt + \int\limits_0^y Q(0,t)dt + C = \int\limits_0^x (3y\sin 3t + \cos t)dt + \int\limits_0^y (2t - \cos(3\cdot 0))dt + C =$

$= (-y\cos 3t + \sin t)\Big|_0^x + (t^2 - t)\Big|_0^y + C = (-y\cos 3x + \sin x) - (-y\cos 0 + \sin 0) + (y^2 - y) - (0^2 - 0) + C =$

$= -y\cos 3x + \sin x + y + y^2 - y + C = -y\cos 3x + \sin x + y^2 + C.$

Dalej obliczenia jak dla sposobu 2.

Całka krzywoliniowa nieskierowana

Niech L – łuk otwarty zwykły gładki o parametryzacji $x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]$.
Długość łuku L określona jest wzorem

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

Łukowi L nie nadaje się żadnego kierunku.
Na łuku L określona jest funkcja $f(x, y)$.
Każdemu punktowi (x, y) należącemu do łuku zostaje przyporządkowana liczba rzeczywista $f(x, y)$.
Wykresem funkcji f będzie zbiór punktów przestrzeni $\mathbb{R}^3$ o współrzędnych $(x, y, f(x, y))$, gdzie $(x, y) \in L$. Możemy sobie wyobrazić, że nad każdym punktem krzywej (łuku L) mamy punkt o współrzędnych $(x, y, f(x, y))$. W przypadku ciągłej funkcji f, zbiór punktów wykresu $(x, y, f(x, y))$ tworzy krzywą w przestrzeni "lewitującą" nad krzywą L leżącą na płaszczyźnie $z = 0$.

Konstrukcja całki nieskierowanej

Całka krzywoliniowa nieskierowana będzie określona dla pary obiektów:
łuk nieskierowany L i funkcja f.

Przedział $[\alpha, \beta]$ dzielimy na n podprzedziałów punktami
$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \beta$.
Odpowiadają im punkty na łuku: $A_0, A_1, \ldots, A_n$, gdzie $A_k = (x(t_k), y(t_k))$
i odcinki $\overline{A_{k-1}A_k}$ o długościach $|\overline{A_{k-1}A_k}| = \Delta l_k$.
W przedziałach $[t_{k-1}, t_k]$ wybieramy punkty τ_k i tworzymy sumę

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f((x(\tau_k), y(\tau_k)) \cdot \Delta l_k.$$

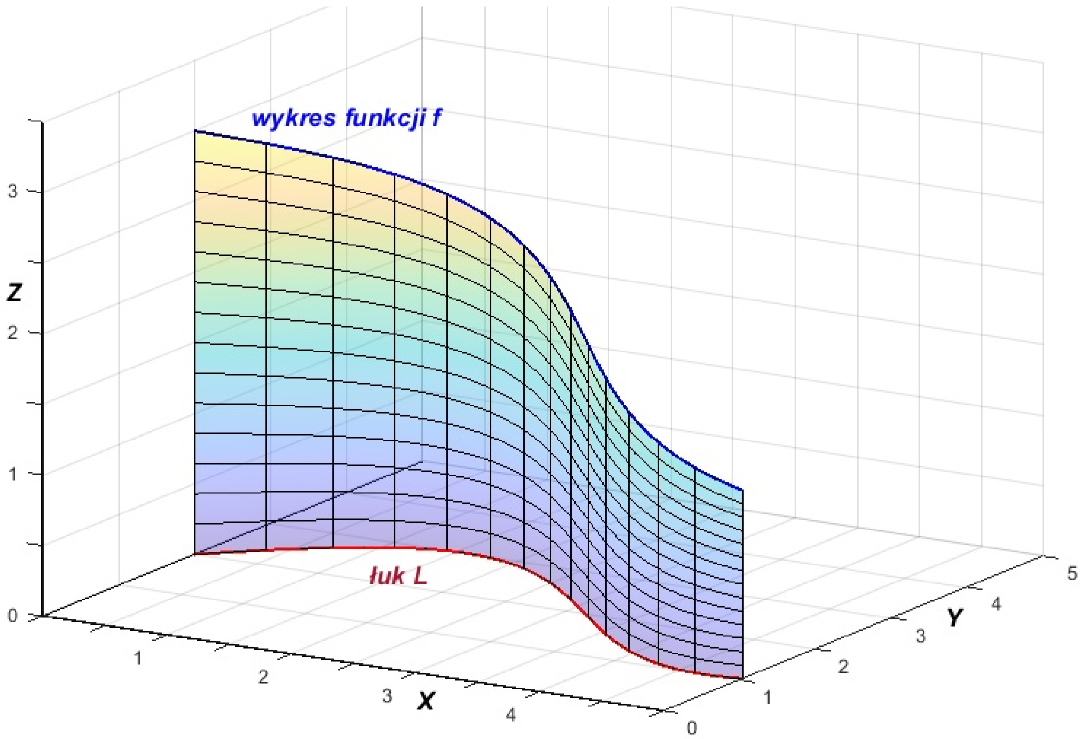
W przypadku funkcji f o wartościach dodatnich, suma S_n to suma pól prostokątów
o wymiarach $|\overline{A_{k-1}A_k}| \times f((x(\tau_k), y(\tau_k))$.

Tę sumę możemy sobie wyobrazić jako pole "płotka" postawionego wzdłuż krzywej L składającego się z pionowych prostokątnych desek o wysokościach odpowiadających wartościom funkcji f.
Zwiększając n, zwiększamy liczbę deseczek i odpowiednio zmniejszamy ich szerokość.

Def. 2. Jeżeli dla każdego normalnego ciągu podziałów przedziału $[\alpha, \beta]$ istnieje ta sama granica właściwa $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ – niezależna od sposobów podziału przedziału i wyboru punktów τ_k,
to wartość tej granicy nazywamy ***całką krzywoliniową nieskierowaną*** funkcji $f(x, y)$
po łuku L i oznaczamy $\int\limits_{L} f(x, y) dl.$

Interpretacja geometrycza

Jeżeli f jest funkcją ciągłą i $f(x,y) > 0$ dla $(x,y) \in L$, to wartość całki $\int\limits_L f(x,y)dl$ określa pole pionowej powierzchni zawartej między dwiema krzywymi w przestrzeni $\mathbb{R}^3$:
L na płaszczyźnie $z = 0$ i wykresem funkcji f.



Uwaga 10: W przypadku, gdy $f(x,y) = 1$ wartość całki $\int\limits_L dl$ jest równa długości krzywej L, jako pole obszaru o wymiarach $1\times$(długość krzywej).

Tw. 4. O zamianie całki krzywoliniowej nieskierowanej na całkę oznaczoną
Jeżeli funkcja $f(x,y)$ jest ciągła na otwartym łuku gładkim o parametryzacji
$x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]$, to zachodzi równość

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt.$$

Uwaga 11. Twierdzenie powyższe pozostaje prawdziwe dla całek po krzywych zamkniętych.

Przykład 11. Obliczyć całkę $\int\limits_L (x+y)dl$, gdzie L jest górną połową okręgu $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$.
Parametryzacja łuku L:
$x(t) = a\cos t$, $y(t) = a\sin t$, $t \in [0, \pi]$, $x'(t) = -a\sin t$, $y'(t) = a\cos t$.
Stosujemy tw. 4.

$$\int_L (x+y)dl = \int_0^\pi (a\cos t + a\sin t)\cdot\sqrt{[-a\sin t]^2+[a\cos t]^2}dt = \int_0^\pi (a\cos t + a\sin t)\cdot\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}dt =$$

$$= a^2\int_0^\pi (\cos t+\sin t)dt = a^2(\sin t - \cos t)\Big|_0^\pi = 2a^2$$

Zauważmy, że $\int_L (x+y)dl = \int_L xdl + \int_L ydl.$

$$\int_L xdl = \int_0^\pi a\cos t\cdot\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}dt = a^2\int_0^\pi \cos t dt = 0.$$

To, że wartość powyższej całki jest równa 0, można było przewidzieć,

wiedząc, że całkujemy funkcję x po krzywej symetrycznej względem osi OY.

Dostajemy przy okazji $\int_L ydl = 2a^2.$

Przykład 12. Wyznaczyć środek masy jednorodnego łuku L - jak w przykładzie 11.

Przyjmijmy, że gęstość liniowa łuku ma stałą wartość c.

Współrzędne środka masy (x_m, y_m) obliczymy ze wzorów:

$$x_m = \frac{\int_L cxdl}{m}, \qquad y_m = \frac{\int_L cydl}{m}, \text{ gdzie masa } m = \int_L cdl.$$

$$m = \int_L cdl = c\int_L dl = c\int_0^\pi \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}dt = ac\int_0^\pi dt = ac\pi.$$

Korzystamy z obliczeń z przykładu 11.

$$\int_L cxdl = c\int_L xdl = 0 \qquad \int_L cydl = c\int_L ydl = c\cdot 2a^2.$$

Dostajemy $x_m = \dfrac{\int_L cxdl}{m} = 0, \quad y_m = \dfrac{\int_L cydl}{m} = \dfrac{2a^2c}{ac\pi} = \dfrac{2a}{\pi} \simeq \dfrac{2}{3}a.$

Zauważmy, że wyznaczony środek masy leży na osi symetrii łuku L, ale nie należy do tego łuku.

Przykład 13. Obliczanie długości krzywych.

Znając parametryzację krzywej L: $x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]$ możemy jej długość wyznaczyć jako całkę $l = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt.$

W szczególnym przypadku, gdy krzywa L jest wykresem funkcji np. $y = f(x), \quad x \in [a, b]$,

to przyjmując naturalną parametryzację: $x(t) = t, y(t) = f(t), t \in [a, b]$ dostaniemy

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(t)]^2}dt.$$

Wzór wygląda prosto, ale w wielu przypadkach obliczanie całki jest kłopotliwe.

Na przykład, aby obliczyć długość fragmentu sinusoidy, czyli wykresu funkcji $f(x) = \sin x$, dla $x \in [a, b]$, należy obliczyć $\int\limits_a^b \sqrt{1 + \cos^2 t}dt$.

Jest to całka nieelementarna, nie ma wzoru na funkcję pierwotną, można ją obliczyć numerycznie dla konkretnych a, b.

Gdybyśmy chcieli obliczyć obwód elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

należałoby wykorzystać parametryzację:

$x(t) = a\cos t,\ y(t) = b\sin t,\quad t \in [0, 2\pi],\ x'(t) = -a\sin t,\ y'(t) = b\cos t$

i obliczyć całkę $\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt$.

Jest to całka eliptyczna, również nie ma wzoru na funkcję pierwotną,

można obliczyć numerycznie jej przybliżoną wartość.