Całka potrójna

Niech $\overline{V} = [a;b]\times[c;d]\times[p;q]$ – ograniczony prostopadłościan, n – liczba naturalna.

Niech f - funkcja trzech zmiennych, ograniczona na $\overline{V}$.

Prostopadłościan $\overline{V}$ dzielimy na n prostopadłościanów $\overline{V_1}, \overline{V_2}, \ldots, \overline{V_n}$ o rozłącznych wnętrzach i objętościach $|\overline{V_1}|, |\overline{V_2}|, \ldots, |\overline{V_n}|$.

Postępujemy tak dla każdego $n \in \mathbb{N}$, otrzymując ciąg podziałów $\overline{V}$.

Rozpatrujemy tylko ***normalne*** ciągi podziałów.

Dla ustalonego podziału $\overline{V_1}, \overline{V_2}, \ldots, \overline{V_n}$ wybieramy po jednym punkcie $A_k \in \overline{V_k}$ z każdego prostopadłościanu.

Tworzymy ***sumę całkową*** S_n funkcji f odpowiadającą temu wyborowi punktów:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(A_k) \cdot |\overline{V_k}|.$$

Def. 1. Jeżeli dla każdego normalnego ciągu podziałów prostopadłościanu $\overline{V}$ istnieje ta sama granica właściwa $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ – niezależna od sposobów podziału $\overline{V}$ i wyboru punktów $A_k \in \overline{V_k}$, to wartość tej granicy nazywamy ***całką potrójną funkcji*** f ***po prostopadłościanie*** $\overline{V}$ i oznaczamy następująco:

$$\iiint\limits_{\overline{V}} f(x,y,z)dxdydz \quad \text{lub} \quad \iiint\limits_{\overline{V}} f(x,y,z)dv. \qquad (1)$$

Jeżeli całka $\iiint\limits_{\overline{V}} f(x,y,z)dv$ istnieje,to funkcja f jest ***całkowalna*** w $\overline{V}$.

Uwaga 1. Jeżeli funkcja f jest ciągła w $\overline{V}$, to jest całkowalna w $\overline{V}$.

Uwaga 2. Całka potrójna posiada własności analogiczne do własności całki podwójnej.

Uwaga 3. Całka $\iiint\limits_{\overline{V}} dxdydz$ przedstawia objętość prostopadłościanu $\overline{V}$.

Tw. 1. (O zamianie całki potrójnej na iterowaną)
Jeżeli funkcja $f(x,y,z)$ jest ciągła w $\overline{V} = [a;b]\times[c;d]\times[p;q]$, to

$$\iiint\limits_{\overline{V}} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b \Big(\int\limits_c^d \Big(\int\limits_p^q f(x,y,z)dz \Big) dy \Big) dx. \qquad (2)$$

Całka iterowana (2) jest równa każdej z pięciu pozostałych całek iterowanych, różniących się od niej tylko kolejnością całkowania.

Przykład 1. Obliczyć całkę $\iiint\limits_{\overline{V}} yz\cos(xy)dxdydz$, gdzie $\overline{V} = \left[0;\frac{\pi}{2}\right]\times\left[\frac{1}{2};1\right]\times\left[1;2\right]$

$$\iiint\limits_{\overline{V}} yz\cos(xy)dxdydz = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \Big(\int\limits_1^2 \Big(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} yz\cos(xy)dx \Big) dz \Big) dy = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \Big(\int\limits_1^2 \Big(yz\frac{\sin(xy)}{y}\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \Big) dz \Big) dy =$$

$$= \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \Big(\int\limits_{1}^{2} z\sin(\frac{\pi}{2}y)dz \Big) dy = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \Big(\frac{z^2}{2}\sin(\frac{\pi}{2}y) \Big|_{z=1}^{z=2} \Big) dy = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{3}{2}\sin(\frac{\pi}{2}y)dy = \frac{3}{2}\Big(-\frac{2}{\pi}\cos(\frac{\pi}{2}y) \Big)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$= \frac{3}{\pi}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2\pi}$$

Tw. 2. Niech $\overline{D}$ – obszar regularny, ϕ_1, ϕ_2 – funkcje ciągłe w $\overline{D}$ oraz

$$\overline{U} = \{(x,y,z): \ (x,y) \in \overline{D}, \ \phi_1(x,y) \leqslant z \leqslant \phi_2(x,y)\}. \qquad (3)$$

Jeśli f jest ciągła w $\overline{U}$, to jest całkowalna w $\overline{U}$ i zachodzi równość

$$\iiint\limits_{\overline{U}} f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{\overline{D}} \Big(\int\limits_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \Big) dxdy.$$

Uwaga 4: Twierdzenie 2 można ougólnić na całki potrójne po zbiorach postaci:

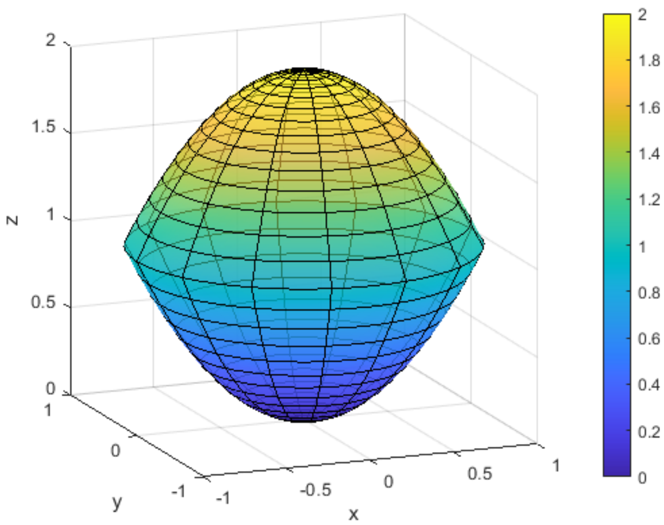
$$\overline{U_{yz}} = \{(x,y,z): \ (y,z) \in \overline{D}, \ \phi_1(y,z) \leqslant x \leqslant \phi_2(y,z)\} \qquad (4)$$

$$\overline{U_{xz}} = \{(x,y,z): \ (x,z) \in \overline{D}, \ \phi_1(x,z) \leqslant y \leqslant \phi_2(x,z)\}. \qquad (5)$$

Interpretacja geometryczna

Uwaga 5. Całka $\iiint\limits_{\overline{V}} dxdydz$ przedstawia objętość bryły $\overline{V}$.

Przykład 2. Wyznaczyć objętość bryły $\overline{V}$ ograniczonej powierzchniami $z = x^2 + y^2, \ z = 2 - x^2 - y^2$.



Bryła jest ograniczona przez dwie paraboloidy obrotowe.

Wyznaczymy zbiór punktów przecięcia tych powierzchni.

$z = x^2 + y^2 = 2 - x^2 - y^2 \ \Rightarrow \ x^2 + y^2 = 1 \ \wedge z = 1$

Paraboloidy przecinają się wzdłuż okręgu. Bryła $\overline{V}$ jest zbiorem typu (3),

gdzie $\overline{D} = \{(x,y):\ x^2+y^2 \leqslant 1\}$, $\phi_1(x,y) = x^2+y^2$, $\phi_2(x,y) = 2-x^2-y^2$.

Do obliczenia jej objętości zastosujemy Tw. 2 i Uwagę 5.

$$\text{Objętość } \overline{V} = \iiint\limits_{\overline{V}} 1 dxdydz = \iint\limits_{\overline{D}} \Big(\int\limits_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} dz \Big) dxdy = \iint\limits_{\overline{D}} \Big(2-x^2-y^2-(x^2+y^2) \Big) dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\overline{D}} \Big(2-2(x^2+y^2) \Big) dxdy = \int\limits_0^{2\pi} \Big(\int\limits_0^1 (2-r^2) r dr \Big) d\phi = \int\limits_0^{2\pi} \Big(r^2 - \frac{r^4}{2}\Big|_0^1 \Big) d\phi = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\phi = \pi$$

Zamiana zmiennych w całce potrójnej

Niech przekształcenie $\overline{T} : \overline{\Omega} \to \overline{U}$, gdzie $\overline{\Omega}, \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^3$ – zbiory postaci (3),

$T(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$.

Tw. 3. Jeżeli

1. funkcja f jest ciągła w $\overline{U}$;
2. przekształcenie T jest różnowartościowe oraz klasy C^1 i przekształca wnętrze obszaru $\overline{\Omega}$ na wnętrze obszaru $\overline{U}$;
3. Jakobian $\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$ jest różny od zera w obszarze $\overline{\Omega}$,

to $\displaystyle\iiint\limits_{\overline{U}} f(x,y,z) dxdydz = \iiint\limits_{\overline{\Omega}} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \cdot \left| \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} \right| dudvdw.$

Przykład 3. Obliczyć całkę $\displaystyle\iiint\limits_{\overline{U}} \frac{(x+y)(x-y)^2}{(5x-3y+z)^2} dxdydz,$

gdzie $\overline{U} = \{(x,y,z):\ 0 \leqslant x+y \leqslant 3,\ 1 \leqslant x-y \leqslant 2,\ 1 \leqslant 5x-3y+z \leqslant 3\}$

Bryła $\overline{U}$ jest równoległościanem.

Wprowadzamy nowe zmienne: $u = x+y, \quad v = x-y, \quad w = 5x-3y+z$

i zastosujemy Tw. 3.

Gdy $(x,y,z) \in \overline{U}$, wtedy $(u,v,w) \in \overline{\Omega} = [0,3] \times [1,2] \times [1,3]$.

$x(u,v,w) = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v, \quad y(u,v,w) = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v, \quad z(u,v,w) = w-u-4v$

Odwzorowanie $T : (u,v,w) \mapsto \Big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w) \Big)$ ma wymagane własności.

$x_u = \frac{\partial}{\partial u}(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v) = \frac{1}{2}, \qquad x_v = \frac{\partial}{\partial v}(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v) = \frac{1}{2} \qquad x_w = \frac{\partial}{\partial w}(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v) = 0$

$y_u = \frac{\partial}{\partial u}(\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v) = \frac{1}{2}, \qquad y_v = \frac{\partial}{\partial v}(\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v) = -\frac{1}{2} \qquad y_w = \frac{\partial}{\partial w}(\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v) = 0$

$z_u = \frac{\partial}{\partial u}(w-u-4v) = -1, \qquad z_v = \frac{\partial}{\partial v}(w-u-4v) = -4 \qquad z_w = \frac{\partial}{\partial w}(w-u-4v) = 1$

Wyznaczamy Jakobian odwzorowania T

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

Obliczamy całkę z wykorzystaniem opisanej zamiany zmiennych.

$$\iiint\limits_U \frac{(x+y)(x-y)^2}{(5x-3y+z)^2} dxdydz = \iiint\limits_\Omega \frac{uv^2}{w^2} \cdot \frac{1}{2} dudvdw = \frac{1}{2} \int_1^3 \Big(\int_1^2 \Big(\int_0^3 \frac{uv^2}{w^2} du \Big) dv \Big) dw =$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{1}{w^2} dw \cdot \int_1^2 v^2 dv \cdot \int_0^3 u du = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{w}\Big|_1^3 \cdot \frac{v^3}{3}\Big|_1^2 \cdot \frac{u^2}{2}\Big|_0^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{9}{2} = \frac{7}{2}$$

Współrzędne sferyczne

Do obliczania całek po zbiorach będących fragmentami kuli wygodne mogą być tzw. współrzędne sferyczne.

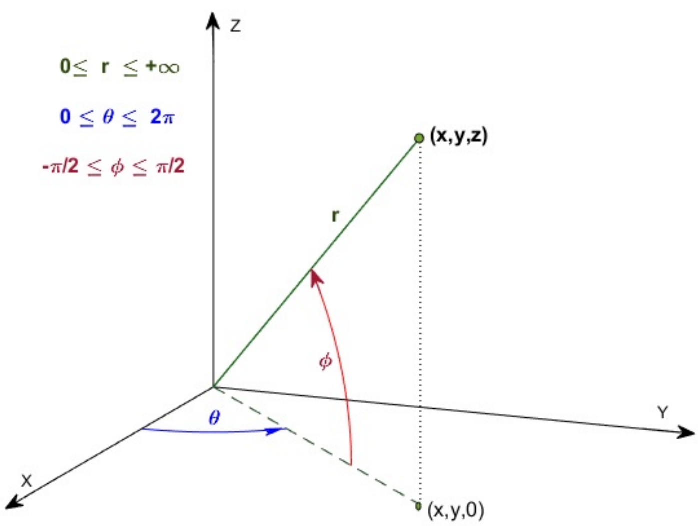
Jeżeli zmienne x, y, z zastąpimy zmiennymi r, ϕ, θ, gdzie

$$x = r\cos\phi\cos\theta, \quad y = r\cos\phi\sin\theta, \quad z = r\sin\phi$$

(r jest odległością punktu (x, y, z) od punktu $(0, 0, 0)$)

$r \in [0, +\infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ – ***współrzędne sferyczne***,

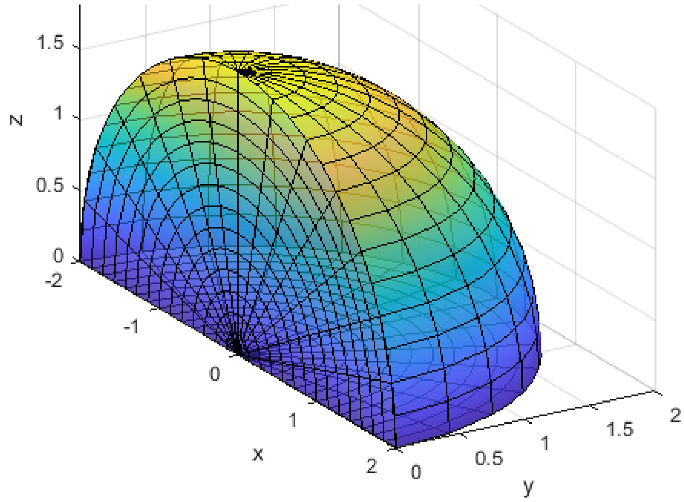
to $$J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \cos\phi\cos\theta & -r\cos\phi\sin\theta & -r\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi\sin\theta & r\cos\phi\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi & 0 & r\cos\phi \end{vmatrix} = r^2\cos\phi$$



Przykład 4. Obliczyć całkę $\iiint\limits_{\overline{V}} y\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$,

gdzie $\overline{V} = \{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 4,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0\}$.

Bryła $\overline{V}$ jest ćwiartką kuli.



Do obliczeń wykorzystamy współrzędne sferyczne r, ϕ, θ.

Przyjmujemy $x = r\cos\phi\cos\theta$, $y = r\cos\phi\sin\theta$, $z = r\sin\phi$, $J = r^2\cos\phi$.

Gdy $(x,y,z) \in \overline{V}$, wtedy $r \in [0,2]$, $\phi \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $\theta \in [0,\pi]$, $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = r$.

$$\iiint\limits_{\overline{V}} y\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} r\cos\phi\sin\theta\cdot r\cdot r^2\cos\phi\,drd\phi d\theta = \int_0^{\pi}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^{2} r^4\sin\theta\cos^2\phi\,dr\Big)d\phi\Big)d\theta =$$

$$\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\phi\,d\phi\cdot\int_0^{2} r^4 dr = -\cos\theta\Big|_0^{\pi}\cdot\frac{1}{2}(1+\frac{\sin 2\phi}{2})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{r^5}{5}\Big|_0^{2} = 2\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{32}{5} = \frac{16}{5}\pi.$$

Zmodyfikowane współrzędne dla elipsoidy.

Uwaga: Do obliczania całek po obszarach ograniczonych elipsoidą: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$ wygodne mogą być zmodyfikowane zmienne:

x, y, z zastępujemy zmiennymi r, ϕ, θ, gdzie

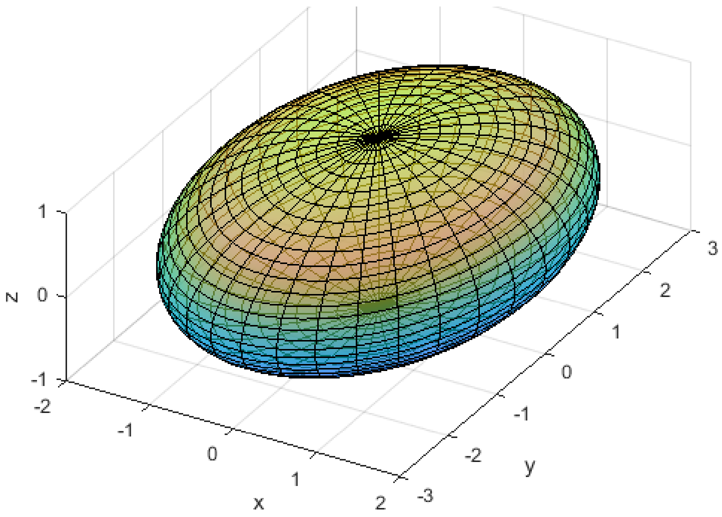
$x = ar\cos\phi\cos\theta$, $y = br\cos\phi\sin\theta$, $z = cr\sin\phi$ i jakobian $J = abcr^2\cos\phi$.

Dla pełnej elipsoidy przyjmujemy zakresy zmiennych: $r \in [0,1]$, $\phi \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $\theta \in [0,2\pi]$.

Przykład 5. Obliczyć objętość bryły $\overline{E} = \{(x,y,z):\ 9x^2+4y^2+36z^2 \leqslant 36\}$.

$9x^2+4y^2+36z^2 \leqslant 36 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2 \leqslant 1$

Bryła $\overline{E}$ jest elipsoidą o półosiach: $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$.



Objętość bryły obliczymy jako całkę $|\overline{E}| = \iiint\limits_{\overline{E}} dxdydz$

z wykorzystaniem następującej zamiany zmiennych:

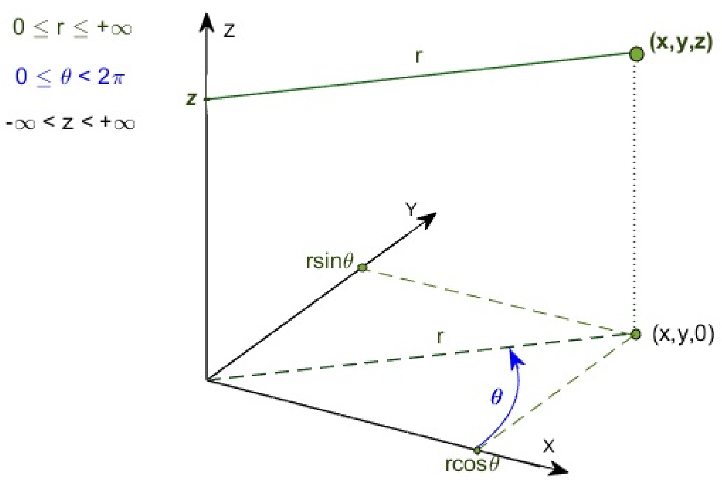
$x = 2r\cos\phi\cos\theta, \quad y = 3r\cos\phi\sin\theta, \quad z = r\sin\phi$ i jakobian $J = 6r^2\cos\phi$.

Przyjmiemy następujące zakresy zmiennych: $r \in [0,1], \ \phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \ \theta \in [0, 2\pi]$.

$$|\overline{E}| = \iiint\limits_{\overline{E}} dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} 6r^2\cos\phi drd\phi d\theta = \int\limits_0^{2\pi}\Big(\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\big(\int\limits_0^1 6r^2\cos\phi\, dr\big)d\phi\Big)d\theta =$$

$$= 6\int\limits_0^{2\pi} d\theta \cdot \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi\, d\phi \cdot \int\limits_0^1 r^2 dr = 6 \cdot 2\pi \cdot \sin\phi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{r^3}{3}\Big|_0^1 = 8\pi.$$

Współrzędne walcowe (cylindryczne)



Jeżeli zmienne x, y, z zastąpimy zmiennymi r, θ, z, gdzie

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$$

(r jest odległością punktu (x, y, z) od osi OZ)

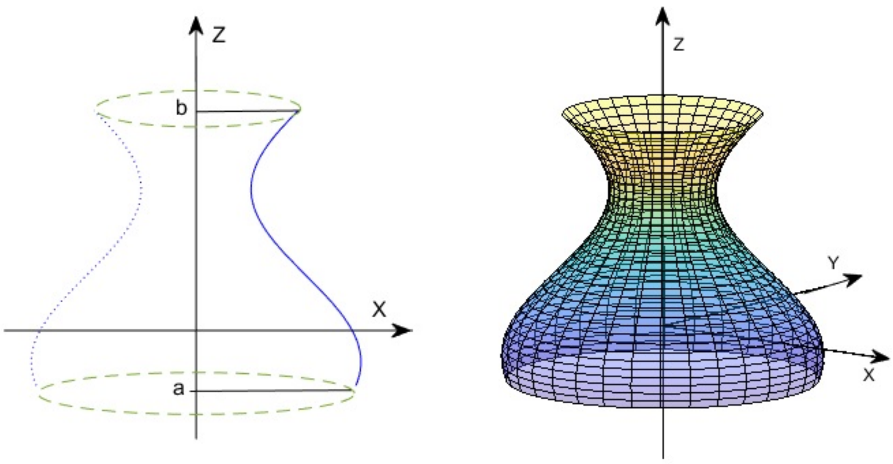
$r \in [0, +\infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $z \in (-\infty, \infty)$ – ***współrzędne walcowe***,

to jakobian $\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$

Wspólrzędne walcowe są zazwyczaj wykorzystywane do obliczania całek po zbiorach, które są bryłami obrotowymi lub są fragmentami takich brył.

Objętość brył obrotowych

Rozważmy bryłę B której powierzchnia boczna powstaje w wyniku obrotu wokół osi OZ wykresu funkcji $x = f(z)$ dla $z \in [a, b]$.



Do obliczenia objętości bryły wykorzystamy zamianę zmiennych na współrzędne walcowe:

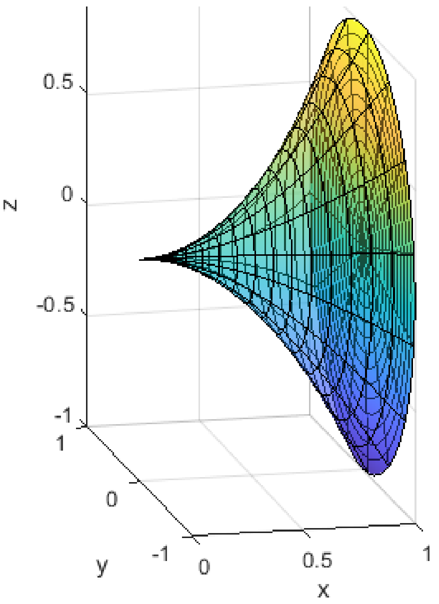
$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$, $J = r$.

Dla bryły obrotowej określonej powyżej mamy: $\theta \in [0, 2\pi]$, $z \in [a, b]$, $r \in [0, f(z)]$.

$$V = \iiint\limits_{B} dxdydz = \int_0^{2\pi}\Big(\int_a^b\Big(\int_0^{f(z)} rdr\Big)dz\Big)d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_a^b\Big(\int_0^{f(z)} rdr\Big)dz =$$

$$= 2\pi \cdot \int_a^b \Big(\frac{r^2}{2}\Big|_0^{f(z)}\Big)dz = 2\pi \cdot \int_a^b \frac{[f(z)]^2}{2}dz = \pi \cdot \int_a^b [f(z)]^2 dz$$

Przykład 6. Obliczyć objętość bryły $\overline{T}$ powstałej przez obrót wokół osi OX wykresu funkcji $f(x) = x^2$ dla $x \in [0, 1]$.



Objętość bryły obliczymy jako całkę $|\overline{T}| = \iiint\limits_{\overline{T}} dxdydz$

Do obliczenia całki wykorzystamy wspólrzędne walcowe, gdzie oś obrotu pokrywa się z osią OX (r to odległość punktu (x, y, z) od osi OX).

$x = x, \quad y = r\cos\theta, \quad z = r\sin\theta, \quad J = r.$

Dla bryły obrotowej określonej w przykładzie mamy: $\theta \in [0, 2\pi],\ x \in [0, 1],\ r \in [0, x^2]$.

$$|\overline{T}| = \iiint\limits_{\overline{T}} dxdydz = \int\limits_0^{2\pi}\Big(\int\limits_0^1\big(\int\limits_0^{x^2} rdr\big)dx\Big)d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \cdot \int\limits_0^1\big(\int\limits_0^{x^2} rdr\big)dx = 2\pi \cdot \int\limits_0^1\big(\frac{r^2}{2}\Big|_0^{x^2}\big)dx =$$

$$= 2\pi \cdot \int\limits_0^1 \frac{x^4}{2}dx = \pi \cdot \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{5}.$$

Zastosowanie w fizyce

Jeśli $\varrho(x, y, z)$ jest gęstością objętościową masy bryły $\overline{B}$,

to całka $M = \iiint\limits_{\overline{B}} \varrho(x, y, z)dxdydz$ wyraża masę tej bryły.

Całki $MS_{xy} = \iiint\limits_{\overline{B}} z\varrho(x, y, z)dxdydz$, $MS_{xz} = \iiint\limits_{\overline{B}} y\varrho(x, y, z)dxdydz$ i $MS_{yz} = \iiint\limits_{\overline{B}} x\varrho(x, y, z)dxdydz$

przedstawiają momenty statyczne bryły $\overline{B}$ względem płaszczyzn układu współrzędnych.

Współrzędne środka masy bryły $\overline{B}$ o gęstości $\varrho(x, y, z)$ wyrażają się następująco:

$$(x_C, y_C, z_C) = \Big(\frac{MS_{yz}}{M}, \frac{MS_{xz}}{M}, \frac{MS_{xy}}{M}\Big).$$