Całka podwójna

Niech $\overline{D} = [a;b] \times [c;d]$ – ograniczony prostokąt o bokach równoległych do osi ukladu współrzędnych, n – liczba naturalna.

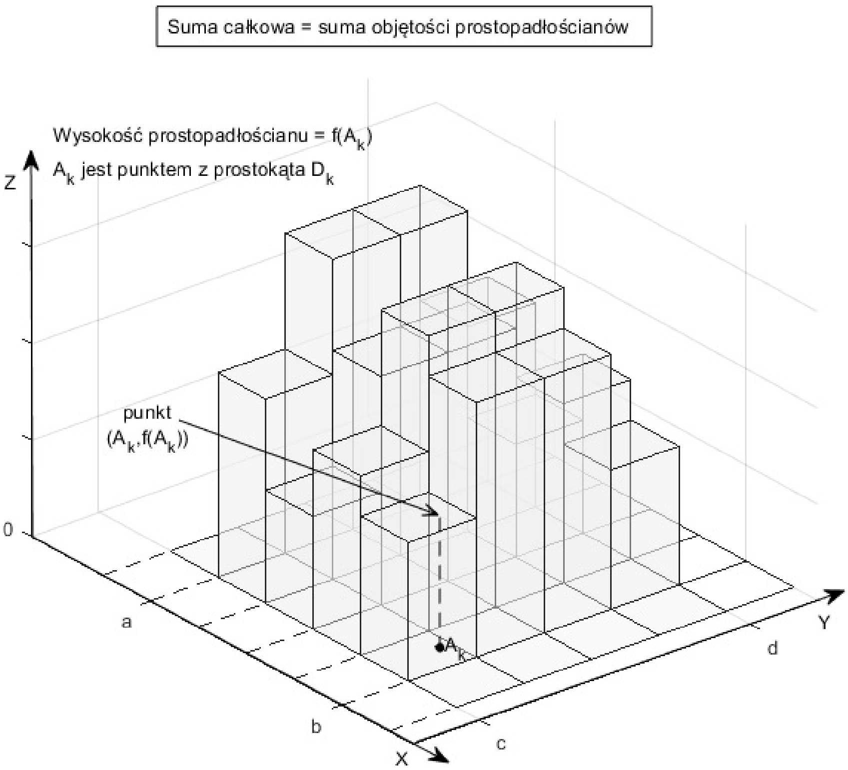
Prostokąt $\overline{D}$ dzielimy na n prostokątów $\overline{D_1}, \overline{D_2}, \ldots, \overline{D_n}$ o rozłącznych wnętrzach i polach $|\overline{D_1}|, |\overline{D_2}|, \ldots, |\overline{D_n}|$. Postępujemy tak dla każdego $n \in \mathbb{N}$, otrzymując ciąg podziałów prostokąta $\overline{D}$. Rozpatrujemy tylko **normalne** ciągi podziałów tzn. takie, w których wraz ze wzrostem n długości przekątnych tworzonych prostokątów dążą do zera.

Niech f - funkcja dwóch zmiennych, ograniczona na $\overline{D}$.

Dla ustalonego podziału $\overline{D_1}, \ldots, \overline{D_n}$ wybieramy po jednym punkcie A_k z każdego prostokąta $\overline{D_k}$.

Tworzymy **sumę całkową** S_n funkcji f odpowiadającą temu wyborowi punktów:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(A_k) \cdot |\overline{D_k}|.$$



Uwaga 1. Dla funkcji f przyjmującej tylko wartości nieujemne, S_n jest sumą objętości prostopadłościanów o podstawach $\overline{D_1}, \overline{D_2}, \ldots, \overline{D_n}$ i wysokościach $f(A_1), \ldots, f(A_n)$.

Wartość S_n jest więc przybliżeniem objętości bryły ograniczonej od dołu płaszczyzną z=0, od góry wykresem funkcji $z = f(x,y)$ i płaszczyznami $x = a,\ x = b,\ y = c,\ y = d$.

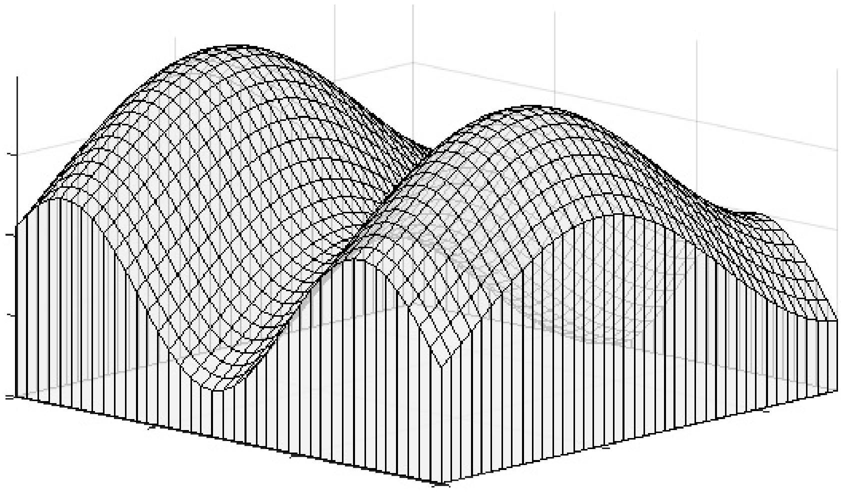
Def. 1. Jeżeli dla każdego normalnego ciągu podziałów prostokąta $\overline{D}$ istnieje ta sama granica właściwa $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ – niezależna od sposobów podziału $\overline{D}$ i wyboru punktów $A_k \in \overline{D_k}$, to wartość tej granicy nazywamy **całką podwójną funkcji** f **po prostokącie** $\overline{D}$ i oznaczamy

$$\iint\limits_{\overline{D}} f(x,y)dxdy \quad \text{lub} \quad \iint\limits_{\overline{D}} f(x,y)d\sigma. \qquad (1)$$

Jeżeli całka $\iint\limits_{\overline{D}} f(x,y)d\sigma$ istnieje, to mówimy, że funkcja f jest **całkowalna** na prostokącie $\overline{D}$.

Interpretacja geometryczna

Jeżeli funkcja f jest nieujemna i ciągła w prostokącie $\overline{D}$, to wartość $\iint\limits_{\overline{D}} f(x,y)d\sigma$ jest równa objętości bryły ograniczonej od dołu płaszczyzną $z=0$, a od góry (powierzchnią) wykresem funkcji $z=f(x,y)$ i płaszczyznami $x=a,\ x=b,\ y=c,\ y=d$.



Własności całki podwójnej na prostokącie $\overline{D}=[a;b]\times[c;d]$

Tw. 1. Jeżeli funkcja f jest ograniczona i ciągła w prostokącie $\overline{D}$ z wyjątkiem, być może skończonej liczby krzywych będących wykresami funkcji jednej zmiennej, to funkcja f jest całkowalna w $\overline{D}$.

1. Jeżeli funkcja f jest całkowalna w prostokącie $\overline{D}$, to dla dowolnej stałej $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\iint\limits_{\overline{D}} \alpha \cdot f(x,y)d\sigma = \alpha \cdot \iint\limits_{\overline{D}} f(x,y)d\sigma$$

2. Jeżeli funkcje f i g są całkowalne na $\overline{D}$, to

$$\iint\limits_{\overline{D}} (f(x,y)+g(x,y))d\sigma = \iint\limits_{\overline{D}} f(x,y)d\sigma + \iint\limits_{\overline{D}} g(x,y)d\sigma$$

3. Jeżeli $\overline{D}$ jest sumą dwóch prostokątów $\overline{D_1}$ i $\overline{D_2}$ o rozłącznych wnętrzach, zaś f jest całkowalna na $\overline{D}$, to jest całkowalna na każdym z tych prostokątów i

$$\iint\limits_{\overline{D}} f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{\overline{D_1}} f(x,y)d\sigma + \iint\limits_{\overline{D_2}} f(x,y)d\sigma$$

Tw. 2. (O zamianie całki podwójnej na całkę iterowaną)

Jeżeli funkcja $f(x,y)$ jest ciągła na $\overline{D}= [a;b]\times[c;d]$, to

$$\iint\limits_{\overline{D}} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \Big(\int\limits_c^d f(x,y)dy\Big)dx = \int\limits_c^d \Big(\int\limits_a^b f(x,y)dx\Big)dy. \qquad (2)$$

Przykład 1. Obliczyć całkę podwójną $\iint\limits_{\overline{D}}(xy+y^2)dxdy$ po prostokącie $\overline{D} = [0,3]\times[-1,1]$.

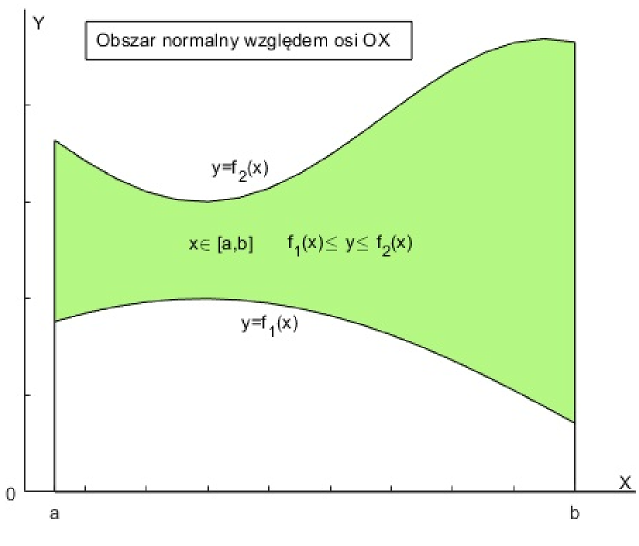
$$\iint\limits_{\overline{D}}(xy+y^2)dxdy = \int\limits_{-1}^{1}\Big(\int\limits_0^3 (xy+y^2)dx\Big)dy = \int\limits_{-1}^{1}\Big(\frac{x^2}{2}y + xy^2\Big|_{x=0}^{x=3}\Big)dy = \int\limits_{-1}^{1}\Big(\frac{9}{2}y+3y^2\Big)dy =$$

$$= \frac{9}{2}\frac{y^2}{2} + 3\frac{y^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 1 - (-1) = 2$$

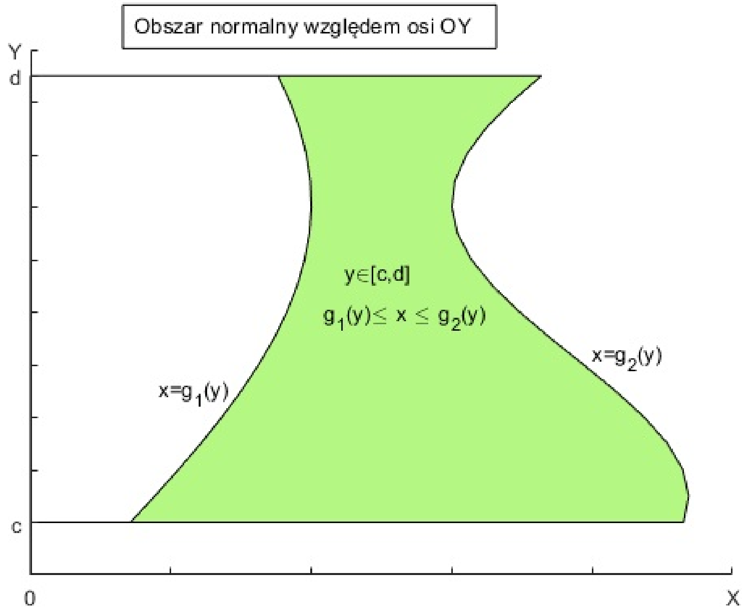
Uwaga 2: Jeśli $f(x,y) = g(x)\cdot h(y)$, to całkę podwójną funkcji $f(x,y)$ po prostokącie $\overline{D}= [a;b]\times[c;d]$ można obliczyć jako iloczyn odpowiednich całek pojedynczych.

$$\iint\limits_{\overline{D}} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b g(x)dx \cdot \int\limits_c^d h(y)dy.$$

Def. 2. Obszarem **normalnym względem osi 0X** nazywamy obszar domknięty
$\overline{D}= \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b,\ f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x),\ a,b\in\mathbb{R},\ f_1, f_2 - \text{ciągłe w } [a;b]\}$.



Def. 3. Obszarem **normalnym względem osi 0Y** nazywamy obszar domknięty
$\overline{D} = \{(x,y) : c \leqslant y \leqslant d,\ g_1(y) \leqslant x \leqslant g_2(y),\ c,d \in \mathbb{R},\ g_1, g_2 - \text{ciągłe w } [c;d]\}$.



Def. 4. Obszarem **regularnym** nazywamy taki obszar domknięty, który jest sumą skończonej liczby obszarów normalnych nie mających wspólnych punktów wewnętrznych.

Tw. 3. Jeżeli funkcja f jest ciągła w obszarze normalnym
$\overline{D} = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b,\ f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x),\ a,b \in \mathbb{R},\ f_1, f_2 - \text{ciągłe w } [a;b]\}$,
to jest całkowalna w tym obszarze i $\displaystyle\iint\limits_{\overline{D}} f(x,y)dxdy = \int_a^b \Big(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy \Big) dx.$

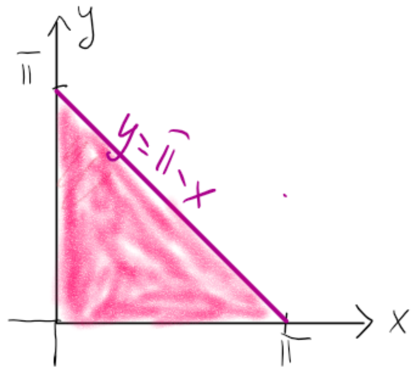
Tw. 4. Jeżeli funkcja f jest ciągła w obszarze normalnym
$\overline{D} = \{(x,y) : c \leqslant y \leqslant d,\ g_1(y) \leqslant x \leqslant g_2(y),\ c,d \in \mathbb{R},\ g_1, g_2 - \text{ciągłe w } [c;d]\}$,
to jest całkowalna w tym obszarze i $\displaystyle\iint\limits_{\overline{D}} f(x,y)dxdy = \int_c^d \Big(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx \Big) dy.$

Przykład 2. Obliczyć całkę $\displaystyle\iint\limits_{\overline{D}} \sin(x+y)dxdy$ po trójkącie $\overline{D} = \{(x,y) :\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x+y \leqslant \pi\}$.

Trójkąt $\overline{D}$ jest obszarem normalnym względem osi OX oraz względem osi OY.

Do obliczeń wykorzystamy Tw. 3.

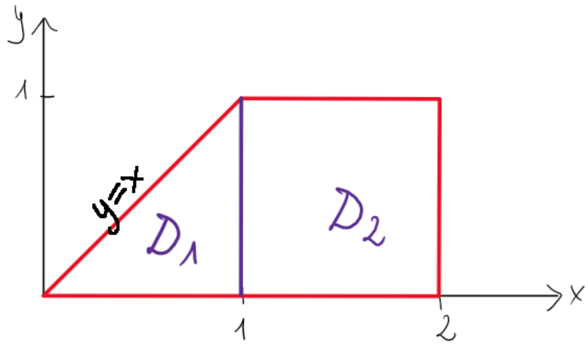
$\overline{D} = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi - x\}$



$$\iint\limits_{\overline{D}} \sin(x+y)dxdy = \int\limits_0^{\pi}\Big(\int\limits_0^{\pi-x} \sin(x+y)dy\Big)dx = \int\limits_0^{\pi}\Big(-\cos(x+y)\Big|_0^{\pi-x}\Big)dx =$$
$$= \int\limits_0^{\pi}(-\cos\pi + \cos x)dx = \int\limits_0^{\pi}(1+\cos x)dx = x + \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi.$$

Uwaga 3. Całkę podwójną funkcji ciągłej w obszarze regularnym $\overline{D_1} \cup \overline{D_2} \cup \ldots \cup \overline{D_n}$ określamy jako sumę całek w obszarach normalnych $\overline{D_1}, \overline{D_2}, \ldots, \overline{D_n}$.

Przykład 3. Wyrazić za pomocą całek iterowanych całkę $\iint\limits_{\overline{T}} f(x,y)dxdy$ po trapezie T o wierzchołkach: $A = (0,0)$, $B = (2,0)$, $C = (2,1)$, $D = (1,1)$.

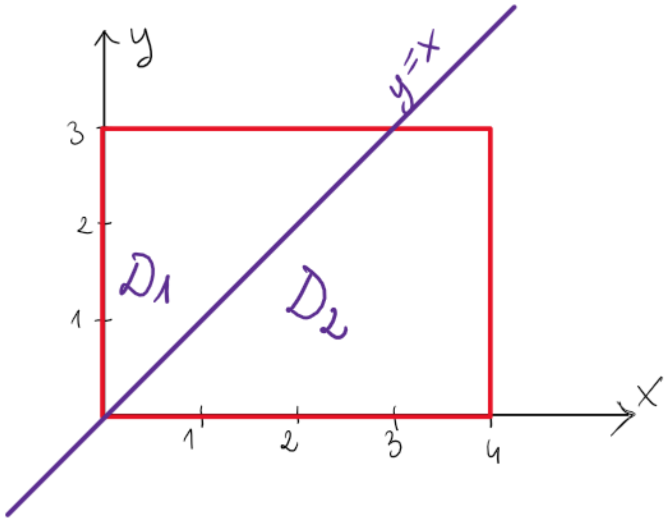


$$\iint\limits_{\overline{T}} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\overline{D_1}} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{\overline{D_2}} f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1\Big(\int\limits_0^x f(x,y)dy\Big)dx + \int\limits_1^2\Big(\int\limits_0^1 f(x,y)dy\Big)dx$$

Można też wykorzystać Tw. 4, bo $T = \{(x,y):\ y \in [0,1],\ y \leqslant x \leqslant 2\}$.

$$\iint\limits_{\overline{T}} f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1\Big(\int\limits_y^2 f(x,y)dx\Big)dy.$$

Przykład 4. Obliczyć całkę $\iint\limits_{\overline{D}} (x + |y-x|)dxdy$ po prostokącie $\overline{D} = [0,4] \times [0,3]$.



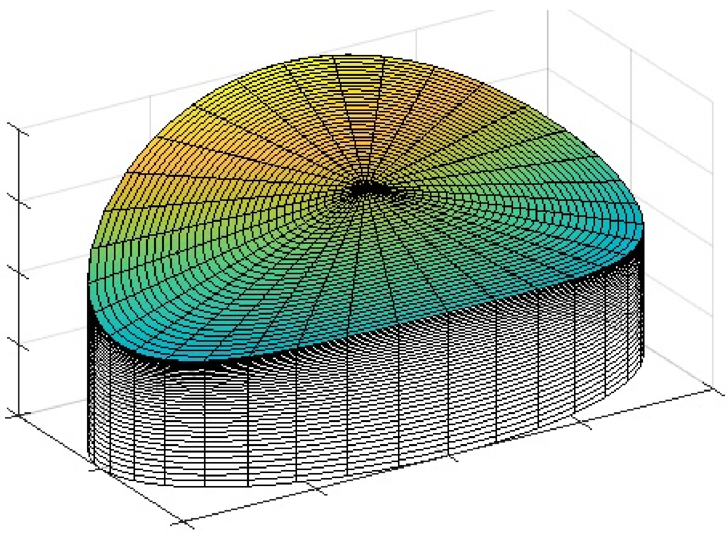
$$f(x,y)=x+|y-x|=\begin{cases} x+y-x=y, & \text{gdy } y\geqslant x;\\ x-(y-x)=2x-y, & \text{gdy } y<x.\end{cases}$$

$$\iint\limits_{\overline{D}}(x+|y-x|)dxdy=\iint\limits_{\overline{D_1}} ydxdy+\iint\limits_{\overline{D_2}}(2x-y)dxdy=\int\limits_0^3\Big(\int\limits_0^y ydx\Big)dy+\int\limits_0^3\Big(\int\limits_y^4(2x-y)dx\Big)dy=$$

$$=\int\limits_0^3\Big(xy\Big|_{x=0}^{x=y}\Big)dy+\int\limits_0^3\Big(x^2-yx\Big|_{x=y}^{x=4}\Big)dy=\int\limits_0^3 y^2dy+\int\limits_0^3(16-4y-y^2+y^2)dy=39.$$

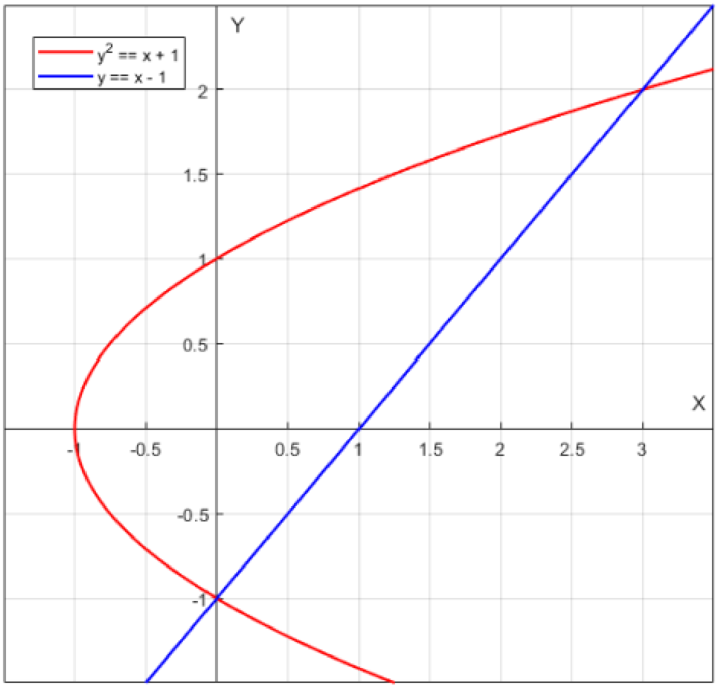
Interpretacja geometryczna całki podwójnej po obszarze

Jeżeli funkcja f jest nieujemna i ciągła w obszarze regularnym $\overline{D}$, to wartość całki $\iint\limits_{\overline{D}} dxdy$ jest równa objętości bryły o podstawie $\overline{D}$, ograniczonej powierzchnią $z=f(x,y)$ oraz powierzchnią walcową utworzoną z prostych równoległych do osi 0Z i przechodzących przez brzeg obszaru $\overline{D}$.



W szczególności pole obszaru $\overline{D}$ jest równe całce $\iint\limits_{\overline{D}} 1dxdy$.

Przykład 5. Obliczyć pole obszaru $\overline{D}$ ograniczonego krzywymi $y = x - 1$, $y^2 = x + 1$.
Pole obliczymy jako całkę $P = \iint\limits_{\overline{D}} 1dxdy$.



Wyznaczamy punkty przecięcia krzywych ograniczających obszar.

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y^2 = x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ (x-1)^2 = x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Najwygodniej będzie potraktować obszar $\overline{D}$ jako obszar normalny względem osi OY.

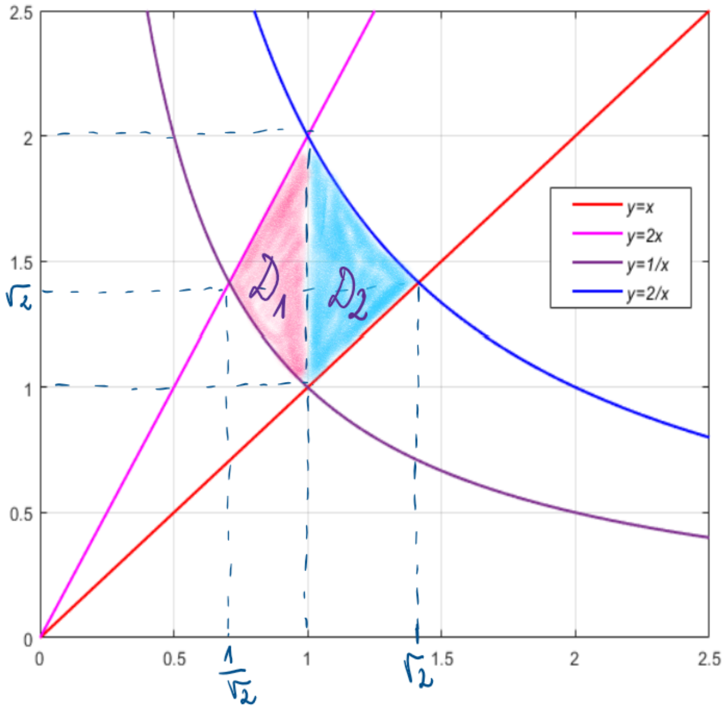
$\overline{D} = \{(x, y): \ y \in [-1, 2], \ y^2 - 1 \leqslant x \leqslant y + 1\}$

$$P = \iint\limits_{\overline{D}} 1dxdy = \int_{-1}^{2} \Big(\int_{y^2-1}^{y+1} 1dx \Big) dy = \int_{-1}^{2} \Big(x \Big|_{y^2-1}^{y+1} \Big) dy = \int_{-1}^{2} (y + 1 - y^2 + 1) dy = 2y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \Big|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}.$$

Przykład 6a. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi
$y = x$, $y = 2x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{2}{x}$ i zawierającego punkt $(1, 1\frac{1}{2})$.
Wyznaczamy punkty przecięcia krzywych.

$$\begin{cases} y = x \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} y = x \\ y = \frac{2}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases}, \begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \sqrt{2} \end{cases}, \begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{2}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Pole obliczymy jako sumę pól obszarów normalnych D_1 i D_2.



$$Pole = \iint\limits_{D_1} 1dxdy + \iint\limits_{D_2} 1dxdy = \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\Big(\int\limits_{\frac{1}{x}}^{2x} dy\Big)dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}}\Big(\int\limits_{x}^{\frac{2}{x}} dy\Big)dx = \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\Big(2x - \frac{1}{x}\Big)dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}}\Big(\frac{2}{x} - x\Big)dx =$$

$$= (x^2 - \ln|x|)\Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} + (2\ln|x| - \frac{1}{2}x^2)\Big|_{1}^{\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{2} - \ln 1 + \ln\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\ln\sqrt{2} - 2\ln 1 - 1 + \frac{1}{2} = \ln\sqrt{2}.$$

Zamiana zmiennych w całce podwójnej

Niech $\overline{\Delta} \subseteq 0UV$, $\overline{D} \subseteq 0XY$ – obszary domknięte w odpowiednich przestrzeniach oraz przekształcenie $\overline{T} : \overline{\Delta} \to \overline{D}$ takie, że $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$.

Jeżeli funkcje $x(u,v), y(u,v)$ mają ciągłe pochodne cząstkowe I rzędu w $\overline{\Delta}$, to

Def. 4. ***Jakobianem*** przekształcenia T nazywamy wyznacznik

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Tw. 5. (**O zamianie zmiennych w całce podwójnej**) Jeżeli

1. funkcja f jest ciągła w $\overline{D}$;
2. przekształcenie T jest różnowartościowe i przekształca wnętrze obszaru regularnego $\overline{\Delta}$ na wnętrze obszaru regularnego $\overline{D}$;
3. funkcje $x(u,v), y(u,v)$ są klasy C^1 (są ciągłe i mają ciągłe pochodne cząstkowe I rzędu) w pewnym obszarze zawierającym $\overline{\Delta}$;
4. Jakobian $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ jest różny od zera we wnętrzu obszaru $\overline{\Delta}$,

$$\text{to} \quad \iint_{\overline{D}} f(x,y)dxdy = \iint_{\overline{\Delta}} f(x(u,v),y(u,v)) \cdot \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| dudv.$$

Przykład 6b. Wykorzystując zamianę zmiennych, obliczyć pole obszaru $\overline{D}$ ograniczonego krzywymi $y = x,\ y = 2x,\ y = \dfrac{1}{x},\ y = \dfrac{2}{x}$ i zawierającego punkt $(1, 1\frac{1}{2})$.

Pole obliczymy jako całkę $P = \displaystyle\iint_{\overline{D}} 1dxdy$

Wprowadzamy nowe zmienne: $u = xy,\ v = \dfrac{y}{x}$. Gdy $(x,y) \in \overline{D}$, wtedy $(u,v) \in \overline{\Delta} = [1,2] \times [1,2]$.

Odwzorowanie $T : (u,v) \mapsto \Big(x(u,v), y(u,v)\Big)$ ma wymagane własności.

$$x(u,v) = \sqrt{\frac{u}{v}}, \quad y(u,v) = \sqrt{uv}$$

$$x_u = \frac{\partial}{\partial u}\sqrt{\frac{u}{v}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{u}{v}}} \cdot \frac{1}{v} = \frac{1}{2\sqrt{uv}}, \qquad x_v = \frac{\partial}{\partial v}\sqrt{\frac{u}{v}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{u}{v}}}\Big(-\frac{u}{v^2}\Big) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v^3}},$$

$$y_u = \frac{\partial}{\partial u}\sqrt{uv} = \frac{1}{2\sqrt{uv}} \cdot v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}}, \qquad y_v = \frac{\partial}{\partial v}\sqrt{uv} = \frac{1}{2\sqrt{uv}} \cdot u = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}}.$$

Wyznaczamy Jakobian odwzorowania T

$$J = \det\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v^3}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{bmatrix} = \frac{1}{4v} + \frac{1}{4v} = \frac{1}{2v}$$

Obliczamy całkę z wykorzystaniem opisanej zamiany zmiennych.

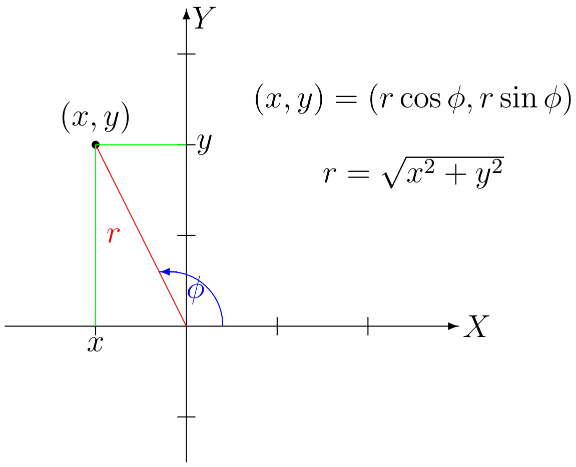
$$P = \iint_{\overline{D}} 1dxdy = \iint_{\overline{\Delta}} 1(u,v) \cdot J\ dudv = \int_1^2\Big(\int_1^2 \frac{1}{2v}dv\Big)du =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_1^2 \frac{1}{v}dv \cdot \int_1^2 du = \frac{1}{2} \cdot \ln|v|\Big|_1^2 \cdot u\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}.$$

Współrzędne biegunowe

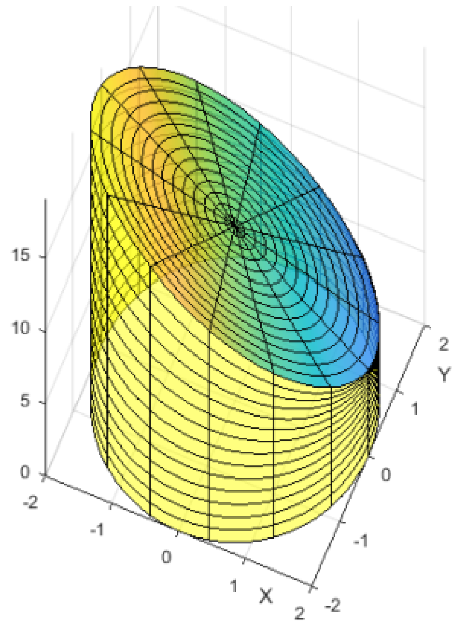
Częstą zamianą zmiennych w całce podwójnej jest zastąpienie zmiennych x, y zmiennymi r, ϕ, gdzie

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi \ \text{ i jakobian } \ J = \frac{D(x,y)}{D(r,\phi)} = \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{vmatrix} = r$$



Współrzędne biegunowe są używane przy obliczaniu całek po obszarach ograniczonych okręgami.

Przykład 7. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami:
$x^2 + y^2 = 4, \ z = 0, \ 3x + 2y + z = 12.$



Podstawą bryły jest koło $\overline{D} = \{(x,y): \ x^2 + y^2 \leqslant 4\}$ na wysokości $z = 0$, z góry bryła jest ograniczona wykresem $z = f(x,y) = 12 - 3x - 2y$,

dlatego objętość można obliczyć następująco:

$$V = \iint\limits_{\overline{D}} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\overline{D}}(12 - 3x - 2y)dxdy = \iint\limits_{\overline{D}} 12dxdy - \iint\limits_{\overline{D}}(3x + 2y)dxdy$$

$$\iint\limits_{\overline{D}} 12dxdy = 12 \iint\limits_{\overline{D}} dxdy = 12 \cdot pole\overline{D} = 12 \cdot \pi \cdot 2^2 = 48\pi.$$

Do obliczenia całki $\iint\limits_{\overline{D}}(3x + 2y)dxdy$ wykorzystamy współrzędne biegunowe r, ϕ, gdzie,

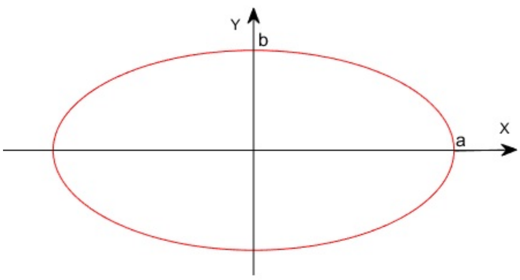
$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi \;\; J = r, \;\; r \in [0,2], \;\; \phi \in [0, 2\pi]$.

$$\iint\limits_{\overline{D}}(3x + 2y)dxdy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 (3r\cos\phi + 2r\sin\phi)rdr\right)d\phi = \int_0^{2\pi}(3\cos\phi + 2\sin\phi)d\phi \cdot \int_0^2 r^2 dr = 0.$$

Ostatecznie objętość $V = 48\pi$.

Uwaga: Do obliczania całek po obszarach ograniczonych elipsą: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
wygodna może być następująca zamiana zmiennych:
x, y zastępujemy zmiennymi r, ϕ, gdzie

$$x = ar\cos\phi, \quad y = br\sin\phi \quad \text{i jakobian} \quad \frac{D(x,y)}{D(r,\phi)} = \begin{vmatrix} a\cos\phi & -ar\sin\phi \\ b\sin\phi & br\cos\phi \end{vmatrix} = abr$$



Dla pełnej elipsy przyjmujemy ograniczenia współrzędnych: $r \in [0,1], \;\; \phi \in [0, 2\pi]$.

Przykład 8. Obliczyć pole powierzchni $\overline{E}$ ograniczonej elipsą: $9x^2 + 4y^2 = 36$.

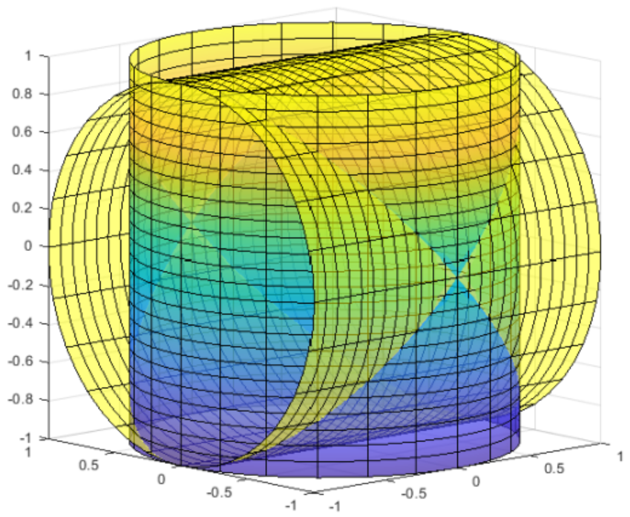
$9x^2 + 4y^2 = 36 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1$ Półosie elipsy to $a = 2, \; b = 3$.

Pole elipsy obliczymy jako całkę $P = \iint\limits_{\overline{E}} dxdy$ z wykorzystaniem następującej zamiany zmiennych:

$x = 2r\cos\phi, \quad y = 3r\sin\phi, \quad J = 2 \cdot 3 \cdot r, \;\; r \in [0,1], \;\; \phi \in [0, 2\pi]$

$$P = \iint\limits_{\overline{E}} dxdy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 6rdr\right)d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \cdot \int_0^1 6rdr = 2\pi \cdot \frac{6r^2}{2}\bigg|_0^1 = 6\pi.$$

Przykład 9. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami: $x^2 + y^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$, gdzie a jest pewną liczbą dodatnią.



Bryla ma między innymi następujące płaszczyzny symetrii: $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$.

Dlatego jej objętość można obliczyć jako 8 razy objętość tej części bryły, która zawiera się w oktancie nieujemnych współrzędnych.

Jeśli $y^2 + z^2 \leqslant a^2$ to dla $z \geqslant 0$ będzie $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{a^2 - y^2}$.

Jako D przyjmiemy odpowiednią ćwiartkę koła:

$\overline{D} = \{(x, y) : \ x^2 + y^2 \leqslant a^2, \ x \geqslant 0, \ y \geqslant 0\} = \{(x, y) : \ y \in [0, a], \ 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{a^2 - y^2}\}$.

$$V = 8 \cdot \iint\limits_{\overline{D}} \sqrt{a^2 - y^2} dxdy = 8 \cdot \int\limits_0^a \Big(\int\limits_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2 - y^2} dx \Big) dy = 8 \cdot \int\limits_0^a \sqrt{a^2 - y^2} \Big(\int\limits_0^{\sqrt{a^2-y^2}} dx \Big) dy =$$

$$= 8 \cdot \int\limits_0^a \sqrt{a^2 - y^2} \cdot \sqrt{a^2 - y^2} dy = 8 \cdot \int\limits_0^a (a^2 - y^2) dy = 8 \cdot (a^2 y - \frac{1}{3} y^3) \Big|_0^a = 8(a^3 - \frac{1}{3} a^3) = \frac{16}{3} a^3.$$

Zastosowanie w fizyce

Jeśli $\varrho(x, y)$ jest gęstością powierzchniową masy obszaru regularnego $\overline{D}$,

to całka $M = \iint\limits_{\overline{D}} \varrho(x, y) dxdy$ wyraża masę tego obszaru.

Całki $M_X = \iint\limits_{\overline{D}} y\varrho(x, y) dxdy$ i $M_Y = \iint\limits_{\overline{D}} x\varrho(x, y) dxdy$

przedstawiają momenty statyczne obszaru $\overline{D}$: M_X – względem osi OX, M_Y – względem osi OY.

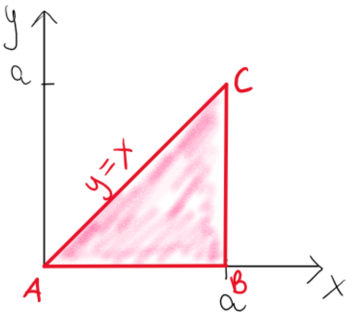
Współrzędne środka masy obszaru $\overline{D}$ o gęstości $\varrho(x,y)$ wyrażają się następująco:

$$(x_C, y_C) = \Big(\frac{M_y}{M}, \frac{M_x}{M}\Big).$$

Całki $B_X = \iint\limits_{\overline{D}} y^2 \varrho(x,y)dxdy$ i $B_Y = \iint\limits_{\overline{D}} x^2 \varrho(x,y)dxdy$ oraz $B_Z = \iint\limits_{\overline{D}} (x^2+y^2)\varrho(x,y)dxdy$ wyrażają momenty bezwładności obszaru $\overline{D}$:

B_X – względem osi OX, B_Y – względem osi OY, B_Z – względem osi OZ.

Przykład 10. Wyznaczyć środek ciężkości jednorodnego trójkąta $\overline{T}$ o wierzchołkach $A=(0,0)$, $B=(a,0)$, $C=(a,a)$, gdzie a jest pewną liczbą dodatnią.



Przyjmiemy, że $\varrho(x,y) = c$ – stała gęstość powierzchniowa.

Wtedy masa trójkąta to

$$M = \iint\limits_{\overline{T}} \varrho(x,y)dxdy = \iint\limits_{\overline{T}} cdxdy = c\cdot \iint\limits_{\overline{T}} dxdy = c\cdot(pole\ T) = c\cdot\frac{a^2}{2}.$$

Współrzędne środka masy trójkąta to (x_C, y_C), gdzie $x_C = \dfrac{\iint\limits_{\overline{T}} xcdxdy}{M}$, $y_C = \dfrac{\iint\limits_{\overline{T}} ycdxdy}{M}$.

$$\iint\limits_{\overline{T}} xcdxdy = c\cdot\iint\limits_{\overline{T}} xdxdy = c\cdot\int_0^a\Big(\int_0^x xdy\Big)dx = c\cdot\int_0^a\Big(xy\Big|_{y=0}^{y=x}\Big)dx = c\cdot\int_0^a x^2dx = c\cdot\frac{a^3}{3}.$$

Stąd $x_C = \Big(c\cdot\dfrac{a^3}{3}\Big)/\Big(c\cdot\dfrac{a^2}{2}\Big) = \dfrac{2}{3}a.$

$$\iint\limits_{\overline{T}} ycdxdy = c\cdot\iint\limits_{\overline{T}} ydxdy = c\cdot\int_0^a\Big(\int_0^x ydy\Big)dx = c\cdot\int_0^a\Big(\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=x}\Big)dx = c\cdot\int_0^a \frac{x^2}{2}dx = c\cdot\frac{a^3}{6}.$$

Stąd $y_C = \Big(c\cdot\dfrac{a^3}{6}\Big)/\Big(c\cdot\dfrac{a^2}{2}\Big) = \dfrac{a}{3}.$