Moc czynna wydzielana w dwójniku

Moc czynna

Mocą czynną nazywamy wartość średnią za okres T mocy chwilowej

$$P \triangleq \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} p(t)\mathrm{d}t$$

Załóżmy, że napięcie i prąd w dwójniku wynoszą:
$u = U_m \cos(\omega t + \varphi_u), \quad i = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$

Moc chwilowa i moc czynna w tym dwójniku wynoszą:

$$p = ui = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) I_m \cos(\omega t + \varphi_i) =$$
$$= \tfrac{1}{2} U_m I_m \Big(\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) + \cos(\underbrace{\varphi_u - \varphi_i}_{\varphi})\Big)$$

$$P = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} p\mathrm{d}t = \frac{1}{2} U_m I_m \cos\varphi = U_{sk} I_{sk} \cos\varphi$$

Moc czynna wydzielana w dwójniku, c.d.

Moce czynne wydzielane wydzielane w elementach R, L, C:

- opór R: $\varphi = 0 \Rightarrow$
  $P = \frac{1}{2} U_m I_m = \frac{1}{2} U_m^2 / R = \frac{1}{2} I_m^2 R = U_{sk} I_{sk} = U_{sk}^2 / R = I_{sk}^2 R$
- pojemność C: $\varphi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow P = 0$
- indukcyjność L: $\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow P = 0$

Moc czynna wydzielana w dwójniku, c.d.

Dla dwójnika **bezźródłowego** o impedancji:

$$Z = |Z|e^{j\varphi_z} = \mathfrak{Re}\,Z + j\,\mathfrak{Im}\,Z$$

mamy następujący związek między argumentami wskazów napięcia φ_u i prądu φ_i:

$$\varphi_u = \varphi_z + \varphi_i \quad \Rightarrow \quad \varphi = \varphi_u - \varphi_i = \varphi_z$$

Moc czynna wydzielana w impedancji jest następująca:

$$P = \frac{1}{2}U_m I_m \cos\varphi_z = \frac{1}{2}I_m^2 \underbrace{|Z|\cos\varphi_z}_{\mathfrak{Re}\,Z} =$$

$$= \frac{1}{2}I_m^2\,\mathfrak{Re}\,Z = \frac{1}{2}\frac{U_m^2}{|Z|^2}\,\mathfrak{Re}\,Z$$

Moc czynna wydzielana w dwójniku, c.d.

Dla admitancji:

$$Y = \frac{1}{Z} = |Y|e^{-j\varphi_z} = \mathfrak{Re}\, Y + j\,\mathfrak{Im}\, Y$$

mamy:

$$\varphi = \varphi_i - \varphi_u = -\varphi_z$$

zatem moc czynna w tej admitancji wyniesie:

$$P = \frac{1}{2} U_m I_m \cos(-\varphi_z) = \frac{1}{2} U_m^2 \underbrace{|Y| \cos(\varphi_z)}_{\mathfrak{Re}\, Y} =$$

$$= \frac{1}{2} U_m^2\, \mathfrak{Re}\, Y = \frac{1}{2} \frac{I_m^2}{|Y|^2}\, \mathfrak{Re}\, Y$$

Moc zespolona, bierna i pozorna

Dany jest dwójnik, na którego zaciskach jest napięcie opisane wskazem $U = U_m e^{j\varphi_u}$, i przez który płynie prąd opisany wskazem $I = I_m e^{j\varphi_i}$

Moc zespolona

Mocą zespoloną nazywamy wielkość:

$$S \triangleq \frac{1}{2} U I^*$$

Przyjmując oznaczenie $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ mamy:

$$S = \tfrac{1}{2} U I^* = \tfrac{1}{2} U_m e^{j\varphi_u} I_m e^{-j\varphi_i} = \\ = \tfrac{1}{2} U_m I_m \cos\varphi + j\tfrac{1}{2} U_m I_m \sin\varphi = P + jQ$$

Moc zespolona, bierna i pozorna, c.d.

- S – moc zespolona [VA]
- $P = \Re S$ – moc czynna [W]
- $Q = \Im S$ – **moc bierna** [VAr]
- $|S| = \sqrt{P^2 + Q^2}$ – **moc pozorna** [VA]

Wyrażenie:

$$\cos\varphi = \frac{P}{|S|}$$

nazywa się często **współczynnikiem mocy**

Bilans mocy

Wniosek z tw. Tellegena dla mocy zespolonych

Dla układu o g gałęziach zachodzi następujący związek:

$$\sum_{k=1}^{g} S_k = \sum_{k=1}^{g} U_k I_k^* = 0$$

(suma mocy zespolonych pobieranych przez wszystkie elementy układu jest równa zeru)

Wniosek:

$$\sum_{k=1}^{g} P_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{g} Q_k = 0$$

(bilansują się zarówno moce czynne jak i moce bierne)

Dopasowanie energetyczne

Dopasowanie na maksimum mocy czynnej

Problem: dla rzeczywistego źródła napięciowego (lub prądowego) o *znanej* impedancji wewnętrznej Z_w należy tak dobrać impedancję (pasywnego) obciążenia Z_0, by w tej impedancji wydzielała się maksymalna moc czynna (zakładamy: $\Re\mathfrak{e}\, Z_w > 0, \Re\mathfrak{e}\, Z_0 > 0$)

Moc dysponowana źródła

Maksymalną moc, jaką źródło rzeczywiste może oddać do pasywnego obciążenia nazywamy *mocą dysponowaną* P_{dysp} tego źródła

Dopasowanie energetyczne, c.d.

Oznaczmy: $Z_w = R_w + \mathrm{j}X_w$, $Z_0 = R_0 + \mathrm{j}X_0$

Wówczas:

$$
\begin{aligned}
P(R_0, X_0) &= \frac{1}{2}|I|^2 \,\mathfrak{Re}\, Z_0 = \frac{1}{2}\left|\frac{E}{Z_w + Z_0}\right|^2 R_0 = \\
&= \frac{1}{2}|E|^2 \frac{R_0}{(R_w + R_0)^2 + (X_w + X_0)^2}
\end{aligned}
$$

Warunkiem koniecznym na to, by funkcja $P(R_0, X_0)$ osiągnęła ekstremum, jest:

$$\frac{\partial P}{\partial R_0} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial X_0} = 0$$

Dopasowanie energetyczne, c.d.

$$\frac{\partial P}{\partial R_0} = \frac{1}{2}|E|^2 \frac{(R_w+R_0)^2+(X_w+X_0)^2-2R_0(R_w+R_0)}{[(R_w+R_0)^2+(X_w+X_0)^2]^2}$$

$$= \frac{1}{2}|E|^2 \frac{R_w^2-R_0^2+(X_w+X_0)^2}{[(R_w+R_0)^2+(X_w+X_0)^2]^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial X_0} = \frac{1}{2}|E|^2 \frac{2R_0(X_w+X_0)}{[(R_w+R_0)^2+(X_w+X_0)^2]^2}$$

Jedynym rozwiązaniem tego układu równań jest:

$$R_0 = R_w,\ X_0 = -X_w,$$

Można sprawdzić, że takiego przypadku

$$W = \frac{\partial^2 P}{\partial R_0^2}\frac{\partial^2 P}{\partial X_0^2} - \left(\frac{\partial^2 P}{\partial R_0 \partial X_0}\right)^2 > 0 \quad \text{oraz:} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial R_0^2} < 0$$

co oznacza, że dla $R_0 = R_w$, $X_0 = -X_w$ występuje istotnie maksimum mocy czynnej P

Dopasowanie energetyczne, c.d.

Ostatecznie otrzymujemy:

Klasyczny warunek dopasowania energetycznego

W obciążeniu Z_0 wydzieli się maksymalna moc czynna wtedy, gdy

$$Z_0 = Z_w^*$$

Wydzielana w tym przypadku moc będzie równa *mocy dysponowanej* źródła:

$$P_{max} = P_{dysp} = \frac{|E|^2}{8\,\mathfrak{Re}\,Z_w}$$

Dopasowanie energetyczne, c.d.

Dla przypadku źródła prądowego J o admitancji wewnętrznej $Y_w = G_w + \mathrm{j}B_w$ warunki dopasowania są następujące:

$$Y_0 = Y_w^*$$

Wydzielana moc będzie równa *mocy dysponowanej* źródła:

$$P_{max} = P_{dysp} = \frac{|J|^2}{8\,\Re\mathfrak{e}\,Y_w} = \frac{|J|^2|Z_w|^2}{8\,\Re\mathfrak{e}\,Z_w}$$

Sprawność

Sprawnością określamy stosunek mocy czynnej traconej w obciążeniu do mocy czynnej pobieranej z idealnego źródła

$$\eta = \frac{P}{P_{R_w} + P} = \frac{R_0}{R_w + R_0}$$