Sygnał sinusoidalny i jego parametry

Sygnał sinusoidalny

$$x(t) = X_m cos(\omega t + \varphi)$$

gdzie:

X_m – *amplituda*

φ – *faza początkowa*

ω – *pulsacja*

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ - okres sygnału

$f = \frac{\omega}{2\pi}$ – częstotliwość sygnału

$$X_{sk} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t)\mathrm{d}t} = \frac{X_m}{\sqrt{2}}$$

Przykład: obwód RC pobudzany sygnałem sinusoidalnym

Przykład.

Rozpatrzmy układ RC zasilany z idealnego źródła napięciowego, o harmonicznej SEM $e(t) = E_m cos(\omega t + \varphi)$.

Zakładamy, że:

- schemat układu obowiązuje dla $t_0 \ll 0$.
- w chwili t_0 napięcie na pojemności wynosiło u_0

Równaniem układu jest:

$$RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = E_m cos(\omega t + \varphi)$$

Rozwiązaniem układu jest suma:

$u = u_p + u_u,$ gdzie: u_p – CORJ, u_u – CSRN

Przykład: obwód RC pobudzany sygnałem sinusoidalnym, c.d.

Pierwiastkiem równania charakterystycznego jest $r = -\frac{1}{RC}$, zatem

$$u_p = Ae^{-\frac{t-t_0}{RC}}$$

u_u przewidujemy w postaci takiej jak wymuszenie:

$$u_u = Bcos(\omega t + \psi)$$

Składowa przejściowa zanika:

$$u_p \rightarrow 0 \text{ dla } t \gg t_0$$

Stan ustalony przy pobudzaniu sinusoidalnym

- Wszystkie wymuszenia (źródła niezależne) są *sinusoidalnie zmienne w czasie* dla $t \in (-\infty, +\infty)$ i mają *tę samą pulsację* ω
- wszystkie prądy i napięcia są *sinusoidalnie zmienne w czasie* dla $t \in (-\infty, +\infty)$ i mają *tę samą pulsację* ω co wymuszenia

Rodzaje operacji w układach SLS

- suma/różnica (prawa Kirchhoffa, równania wielowrotników)
- mnożenie przez stałą (równania elementów)
- pochodna (równania pojemności i indukcyjności)

Suma przebiegów sinusoidalnych

Niech: $x_1 = X_{m1} cos(\omega t + \varphi_1), x_2 = X_{m2} cos(\omega t + \varphi_2)$

Wówczas:

$$x = x_1 + x_2 = X_{m1} cos(\varphi_1) cos(\omega t) - X_{m1} sin(\varphi_1) sin(\omega t) +$$

$$+ X_{m2} cos(\varphi_2) cos(\omega t) - X_{m2} sin(\varphi_2) sin(\omega t) =$$

$$= C \cdot cos(\omega t) - S \cdot sin(\omega t) =$$

$$= \underbrace{\sqrt{C^2 + S^2}}_{X_m} \left(\underbrace{\frac{C}{\sqrt{C^2 + S^2}}}_{cos(\varphi)} \cdot cos(\omega t) - \underbrace{\frac{S}{\sqrt{C^2 + S^2}}}_{sin(\varphi)} \cdot sin(\omega t) \right) =$$

$$= X_m cos(\omega t + \varphi)$$

Mnożenie przez stałą, pochodna

Niech: $x_1 = X_{m1} cos(\omega t + \varphi_1), \quad a \in \mathbb{R}$

Wówczas:

$$x = a \cdot x_1 = \underbrace{a \cdot X_{m1}}_{X_m} cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x = \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = -\underbrace{X_{m1} \cdot \omega}_{X_m} \cdot sin(\omega t + \varphi_1) = X_m cos(\omega t + \varphi_1 + \tfrac{\pi}{2})$$

Pojęcie wskazu

Wskaz

Wskazem lub *amplitudą zespoloną* przebiegu sinusoidalnego

$x(t) = X_m cos(\omega t + \varphi)$

nazywamy liczbę zespoloną

$X = X_m \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$

Wskaz *wzajemnie jednoznacznie* przyporządkowuje *rzeczywistej, sinusoidalnej funkcji czasu* liczbę zespoloną:

$$x(t) = \Re\mathfrak{e}(X\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}) = \frac{X}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \frac{X^*}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$$

Operacje na wskazach

Niech: $x(t) \leftrightarrow X$, $x_1(t) \leftrightarrow X_1$, $x_2(t) \leftrightarrow X_2$, $a \in \mathbb{R}$

Wówczas:

$$x_1(t) + x_2(t) =$$
$$= \frac{X_1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \frac{X_1^*}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} + \frac{X_2}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \frac{X_2^*}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} =$$
$$= \frac{X_1 + X_2}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \frac{(X_1 + X_2)^*}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} \quad \leftrightarrow \quad X_1 + X_2$$

$$a \cdot x(t) = \frac{aX}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \frac{aX^*}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} \quad \leftrightarrow \quad aX$$

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{X}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \frac{X^*}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\right) = \frac{X}{2} \cdot \mathrm{j}\omega\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \frac{X^*}{2}(-\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} =$$
$$= \frac{(\mathrm{j}\omega X)}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \frac{(\mathrm{j}\omega X)^*}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} \quad \leftrightarrow \quad \mathrm{j}\omega X$$

Operacje na wskazach c.d.

- Równania algebraiczne w dziedzinie czasu przechodzą w analogiczne równania algebraiczne w dziedzinie zespolonej
- Równania różniczkowe w dziedzinie czasu **ulegają algebraizacji** w dziedzinie zespolonej (pochodna odpowiada mnożeniu przez liczbę urojoną)

Pojęcie impedancji i admitancji

Równania elementów RLC w dziedzinie zespolonej są następujące:

$$U = RI$$

$$U = \mathrm{j}\omega LI$$

$$I = \mathrm{j}\omega CU$$

i można je zapisać w jednolitej postaci:

$$U = ZI$$

gdzie:

$Z = R$ dla oporu

$Z = \mathrm{j}\omega L$ dla indukcyjności

$Z = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}$ dla pojemności

Liczbę Z nazywamy **impedancją zespoloną**

Pojęcie impedancji i admitancji, c.d.

Równanie $U = ZI$ jest *prawem Ohma* w dziedzinie zespolonej. Można je także zapisać w równoważnej postaci:

$$I = YU$$

gdzie:

$$Y = \frac{1}{R} \text{ dla oporu}$$

$$Y = \mathrm{j}\omega C \text{ dla pojemności}$$

$$Y = \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} \text{ dla indukcyjności}$$

Liczbę Y nazywamy **admitancję zespoloną**

Pojęcie impedancji i admitancji, c.d.

$Z = R + \mathrm{j}X$

R – **rezystancja**

X – **reaktancja**

$Y = G + \mathrm{j}B$

G – **konduktancja**

B – **susceptancja**