MATEMATYKA KONKRETNA 1 $\quad Z_{12}$

1. Sprawdzić, czy dana funkcja jest przekształceniem liniowym.

a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi((x,y)) = (y, xy, x-y)$

b) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi((x,y,z)) = (x-3, 0, y-z)$

c) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, φ – symetria względem prostej o równaniu $y = x+1$.

2. Podać macierz przekształcenia φ w bazach kanonicznych.

Jeśli przekształcenie nie jest izomorfizmem, wyznaczyć bazy jego jądra i obrazu.

a) $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi((x,y,z,t)) = (x-2y, x+2z, x-y+z)$

b) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 \quad \varphi((x,y)) = (x-2y, 0, 4y-2x, 0)$

c) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi((x,y,z)) = (2z, 3x, x-2z)$

d) $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x] \quad (\varphi(w))(x) = (x-1)w'(x) - 2w(x)$

3. Uzasadnić, że istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe φ, które spełnia podane warunki.

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi((0,4,0)) = (4,0,-8), \quad \varphi((-1,1,0)) = (0,0,0), \quad \varphi((2,1,1)) = (1,0,-2).$

Jaki jest rząd tego przekształcenia? Wyznaczyć $\operatorname{Im}\varphi$ oraz $\operatorname{Ker}\varphi$ podając bazy tych przestrzeni.

4. Dla przekształcenia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ określonego wzorem $\varphi(x,y,z) = (2x-3y, x-y+2z)$ podać macierz $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi)$, gdzie baza $\mathcal{A} = ((1,0,-3),(0,1,-2),(0,1,3))$, a $\mathcal{B} = ((3,2),(5,3))$.

5. Dana jest macierz $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ przekształcenia liniowego $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

w bazach $\mathcal{A} = ((2,-1),(-1,1)), \quad \mathcal{B} = ((3,-1,1),(2,0,-3),(1,-1,0)).$

Wyznaczyć macierz przekształcenia φ w bazach kanonicznych i podać wzór przekształcenia φ.

Sprawdzić, czy wektor $(1,2)$ należy do $\operatorname{Ker}\varphi$, a wektor $(1,0,-1)$ należy do $\operatorname{Im}\varphi$.

6. Niech $O_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie obrotem o kąt α wokół punktu $(0,0)$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

Wyznaczyć wzór tego przekształcenia oraz jego macierz w bazach kanonicznych.

7. Niech L będzie prostą o równaniu $y = ax, \ a \in \mathbb{R}$.

Niech $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \psi$ – rzut prostokątny na prostą L.

Wyznaczyć jądro i obraz tego przekształcenia.

Niech $B = (v_1, v_2)$ – baza przestrzeni $\mathbb{R}^2$, gdzie $v_1 \in L, \ v_2 \perp L$. Zapisać macierz $M_B^B(\psi)$.

Wyznaczyć macierz przekształcenia ψ w bazach kanonicznych dla przypadku $a = 3$ oraz zapisać wzór tego przekształcenia.