MATEMATYKA KONKRETNA 1 $\quad Z_7$

1. Podać przykłady funkcji $f : X \to Y$ i zbiorów $A, B \subseteq X$, $C \subseteq Y$, dla których nie są prawdziwe inkluzje:

   (a) $f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$

   (b) $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$

   (c) $C \subseteq f\left(f^{-1}(C)\right)$

2. Niech $f : X \to Y,\ \ A_1, A_2 \subseteq X\ \ , B_1, B_2 \subseteq Y$. Czy zachodzą równości? (wykazać lub podać kontrprzykład)

   (a) $f(A_1 \div A_2) = f(A_1) \div f(A_2)$;

   (b) $f^{-1}(B_1 \div B_2) = f^{-1}(B_1) \div f^{-1}(B_2)$.

3. Dla funkcji $f : X \to Y$ określić zbiór jej wartości $f(X)$ oraz wyznaczyć funkcję odwrotną $f^{-1} : f(X) \to X$.

   (a) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$

   (b) $f : [3\pi, 4\pi] \to \mathbb{R},\ \ f(x) = e^{1-2\cos x}$

4. Dla danych funkcji wyznaczyć obrazy i przeciwobrazy podanych zbiorów. (Wykonać rysunki) Rozstrzygnąć, które z nich są injekcjami, a które surjekcjami. (Uzasadnić odpowiedzi)

   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z},\ \ f(x) = [x] + 1;\quad f^{-1}(\{0\}),\ \ f^{-1}(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}),\ \ f([0, +\infty))$;

   (b) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ \ f(x) = x^2 + 1;\quad f^{-1}(\{\frac{13}{9}\}),\ \ f^{-1}([\frac{10}{9}, 2] \cap \mathbb{Q})$. Czy $[1, 2] \cap \mathbb{Q} \subseteq f(\mathbb{Q})$?

   (c) $f : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x],\ \ f(w(x)) = w^2(x);\quad f(\mathbb{R}_0[x]),\ \ f^{-1}(\mathbb{R}_4[x]),\ \ f^{-1}(\{x^2 + 2x + 1\}),$
   $f^{-1}(\{x^2 + 2x + 2\}),\ \ f^{-1}(f(\{x - 1, x^2 - 1\}))$;

   (d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \ f((x, y)) = |xy|;\quad f^{-1}((-5, 2]),\quad f^{-1}(\{0\}),\quad f((-2, 1) \times \{-1\}),$
   $f(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 = 2\})$;

   (e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \ f((x, y)) = \max\{|x|, y\};\quad f^{-1}((-1, 2]),\quad f^{-1}(\{0\}),\quad f((-2, 1) \times [-1, 2]),$
   $f(\mathbb{N} \times \{100\}),\ \ f(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 = 2\})$;

   (f) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \ f((x, y)) = \min\{|x|, |y|\};\quad f^{-1}(\{-2, 0, 2\}),\ \ f^{-1}((1, 2]),$
   $f((-2, 1) \times [-1, 2]),\ \ f(f^{-1}(\{-1, 0, 1, 2\})),\ \ f(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 = 2\})$;

   (g) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = (y + 2) \cdot \sin x;\quad f((0, \pi] \times \{2\pi\}),\ f^{-1}(\{0\}),\ f^{-1}([0, +\infty))$

   (h) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ \ f(z) = z^3;\quad f^{-1}(\{j, -1\}),\ \ f^{-1}(\mathbb{R}),\ \ f(\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2 \wedge \arg(z) \in [0, \frac{\pi}{4}]\})$.
   Czy $\{j, -j\} \subseteq f^{-1}(\{j, -j\})$?