Funkcje

Definicja funkcji

Niech X, Y - niepuste zbiory. Niech $\rho \subseteq X \times Y$, czyli ρ jest relacją binarną w zbiorze $X \times Y$.
Dziedziną relacji ρ nazywamy zbiór $D_\rho = \{x \in X : \exists y \in Y \, (x, y) \in \rho\}$.

Def. Relację binarną $f \subseteq X \times Y$ nazywamy **funkcją**, jeśli
1. $\forall x \in X \ \exists y \in Y \ (x, y) \in f$ (tzn. $D_f = X$),
2. $\forall x \in X \ \forall y_1, y_2 \in Y \ ((x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f) \Rightarrow y_1 = y_2)$ (relacja jednoznaczna).

W skrócie możemy powiedzieć, że **funkcją odwzorowująca zbiór** X **w** Y jest przyporządkowanie każdemu elementowi zbioru X <u>dokładnie jednego</u> elementu ze zbioru Y.
Jeśli takie przyporządkowanie oznaczymy symbolem f, to sformułowanie, że f odwzorowuje zbiór X w zbiór Y zapisujemy jako

$$f : X \to Y.$$

Uwaga: Zamiast słowa **funkcja** używamy też równoważnie słów ***odwzorowanie*** lub ***przekształcenie***.

Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją.

Zamiast pisać $(x, y) \in f$ piszemy $y = f(x)$.
Dziedziną funkcji f nazywamy zbiór $D_f = X$.
Argumentami funkcji f nazywamy elementy jej dziedziny.

Element $y = f(x)$ nazywamy **wartością funkcji** f dla **argumentu** $x \in X$.
Mówimy też, że x przechodzi na y, lub x przechodzi na $f(x)$, co zapisujemy jako

$$x \mapsto y \quad \text{lub} \quad x \mapsto f(x).$$

Zbiorem wartości lub przeciwdziedziną funkcji f nazywamy zbiór

$$f(X) = \{y \in Y : \exists x \in X \ y = f(x)\} = \{f(x) : \ x \in X\}.$$

Jest to zbiór tych elementów $y \in Y$, dla których istnieje (niekoniecznie jeden) argument $x \in X$ taki, że $y = f(x)$.
Do zbioru $f(X)$ należą takie elementy zbioru Y, które da się otrzymać jako $f(x)$ dla $x \in X$.

Wykresem funkcji $f : X \to Y$ nazywamy zbiór

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : \ x \in X\} \subseteq X \times Y.$$

Zbiór wszystkich funkcji $f : X \to Y$ oznaczamy symbolem Y^X.

Przykłady funkcji

1. **Identyczność.** Niech $X \neq \emptyset$ będzie zbiorem. Identycznością na X nazywamy funkcję

$$id_X : X \to X; \;\; id_X(x) = x.$$

2. **Funkcja charakterystyczna zbioru:** Niech $A \subseteq X$.
Funkcją charakterystyczną zbioru A nazywamy funkcję

$$\chi_A : X \to \{0,1\}, \qquad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \in A \\ 0, & \text{gdy } x \notin A \end{cases}$$

Przykład 1. Funkcja Dirichleta - funkcja charakterystyczna zbioru liczb wymiernych $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$$\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \{0,1\}, \qquad \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{gdy } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Mamy np. $\chi_{\mathbb{Q}}(\frac{4}{17}) = 1, \;\; \chi_{\mathbb{Q}}(\pi) = 0.$

3. **Całość z liczby** (część całkowita liczby). Dla $x \in \mathbb{R}$ niech $[x] \in \mathbb{Z}$ oznacza największą liczbę calkowitą nie większą niż x. Całością z liczby nazywamy funkcję

$$[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto [x].$$

Mamy w szczególności: $[5] = 5, \;\; [-5] = -5, \;\; [4\frac{3}{7}] = 4, \;\; [-4\frac{3}{7}] = -5.$

4. **Nieskończone ciągi** o wyrazach rzeczywistych to funkcje $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
Stosowane jest oznaczenie $a_n = f(n)$.

Własności funkcji

Def. Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy **funkcją różnowartościową** (**injekcją**), jeśli

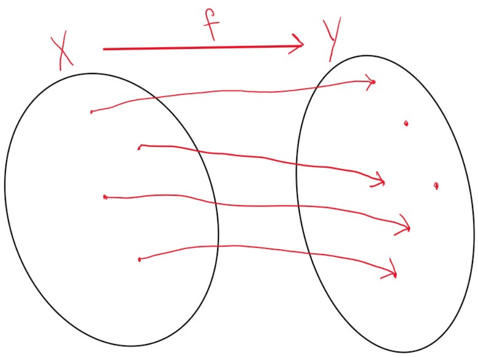
$$\forall x_1, x_2 \in X \; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Z praw logiki wynika, że warunek ten jest równoważny poniższemu warunkowi

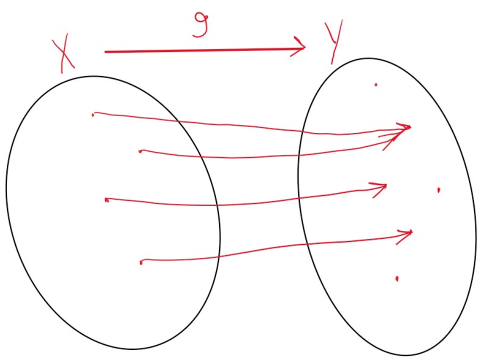
$$\forall x_1, x_2 \in X \; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \;\; x_1 = x_2.$$

Funkcja f jest różnowartościowa, jeśli każda wartość $y \in Y$ jest przyjmowana dla co najwyżej jednego argumentu ze zbioru X.

Uwaga: Graf injekcji ma własność, że końce strzałek dochodzą do różnych punktów.



f jest różnowartościowa



g nie jest różnowartościowa

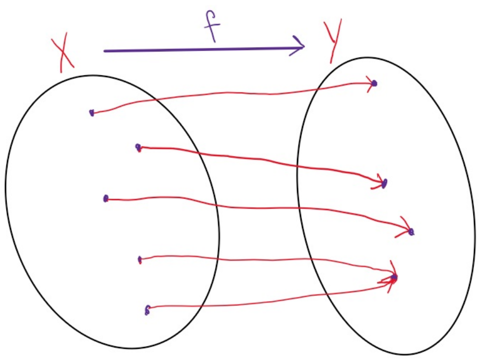
Uwaga: Jeśli $f : X \to Y$ i $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ to wykres funkcji różnowartościowej ma własność, że przecina dowolną prostą poziomą $\{(x, y) : \ y = constans\}$ w **co najwyżej jednym** punkcie.

Def. Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy **funkcją "na"** (**surjekcją**), jeśli

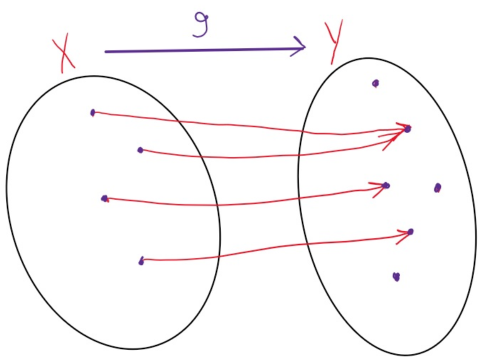
$$\forall y \in Y \ \exists x \in X \ y = f(x) \quad \text{(czyli } f(X) = Y).$$

Funkcja $f : X \to Y$ jest surjekcją, jeśli jej zbiór wartości pokrywa się ze zbiorem Y, czyli każdy element $y \in Y$ można otrzymać jako wartość dla pewnego argumentu $x \in X$.

Uwaga: Graf funkcji "na" ma własność, że do każdego punktu ze zbioru Y dochodzi jakaś strzałka.



f jest "na"



g nie jest "na"

Uwaga: Jeśli $f : X \to Y$ i $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ i f jest surjekcją, to jej wykres przecina każdą prostą poziomą $\{(x, y) : \ y = c\}$, gdzie $c \in Y$ w **co najmniej jednym** punkcie.

Def. Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy **funkcją wzajemnie jednoznaczną** (**bijekcją**), jeśli jest różnowartościowa i "na".

Uwaga: Graf bijekcji ma własność, że do każdego punktu zbioru Y dochodzi dokładnie jedna strzałka.

Uwaga: Interpretacja geometryczna: Jeśli $f : X \to Y$ i $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ i f jest bijekcją, to jej wykres przecina każdą prostą poziomą $\{(x, y) : \ y = c\}$, gdzie $c \in Y$ w **dokładnie jednym** punkcie.

Przykład 2. Niech $f : X \to Y, \quad X, Y \subseteq \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin x$.
Zbadamy własności funkcji f dla różnych zbiorów X i Y.

a) Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Taka funkcja nie jest różnowartościowa, bo np. $\sin 0 = \sin \pi$.
Funkcja ta nie jest surjekcją, bo nie istnieje $x \in \mathbb{R}$, dla którego np. $\sin x = 7$.

b) Niech $f : \mathbb{R} \to [-1,\ 1]$.
Taka funkcja nie jest różnowartościowa podobnie jak w a.
Taka funkcja jest surjekcją, bo dla każdego $y \in [-1,\ 1]$ istnieje $x \in \mathbb{R}$ taki, że $y = \sin x$, w szczególności możemy wziąć $x = \arcsin y$.

c) Niech $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$.
Taka funkcja jest różnowartościowa, ale nie jest surjekcją.

d) Niech $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,\ 1]$.
Taka funkcja jest różnowartościowa i jest "na", więc jest bijekcją.

Przykład 3. Niech $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = z^3$.
Funkcja f nie jest różnowartościowa, bo np. $f(-2) = f(1 + j\sqrt{3}) = -8$.
Jest to funkcja "na", bo dla każdej liczby zespolonej z istnieje liczba zespolona t taka, że $z = t^3$ (taką liczbą t jest któryś z pierwiastków stopnia 3 z liczby z).

Def. **Superpozycją** (**złożeniem**) funkcji $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ nazywamy funkcję $g \circ f : X \to Z$ taką, że $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ dla dowolnego $x \in X$.

Uwaga. Superpozycja funkcji nie jest przemienna (tzn. na ogół $f \circ g \neq g \circ f$), ale jest łączna, tzn. dla dowolnych funkcji $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$ zachodzi $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Przykład 4. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x, \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sin x$.

Złożenie funkcji $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określone jest następująco:
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(e^x) = \sin(e^x)$.
Zaś złożenie $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określone jest następująco:
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sin x) = e^{\sin x}$.
Są to różne funkcje. Funkcja $g \circ f$ przyjmuje wartości z przedziału $[-1,\ 1]$,
a funkcja $f \circ g$ przyjmuje wartości z przedziału $[e^{-1}, e]$.

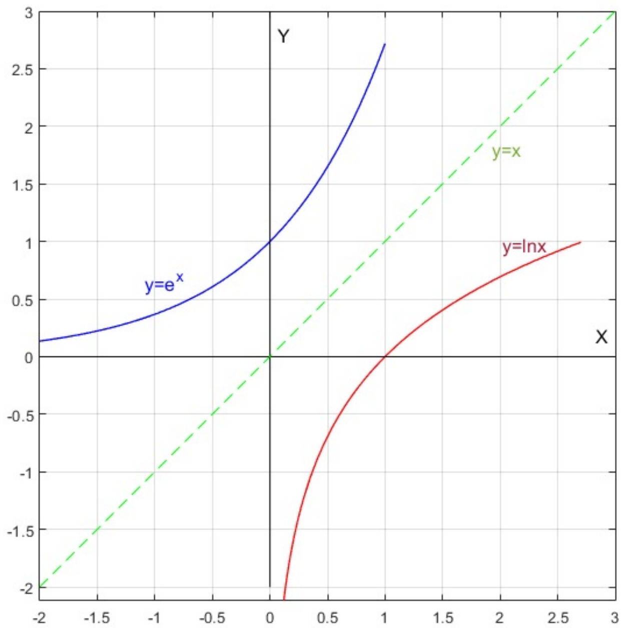
Def. Funkcję $g : Y \to X$ nazywamy **funkcją odwrotną** do funkcji $f : X \to Y$, jeśli dla dowolnego $x \in X$ zachodzi $(g \circ f)(x) = x$. Funkcję odwrotną do f oznaczamy symbolem f^{-1}.

Uwaga: Funkcja posiada funkcję odwrotną wtedy i tylko wtedy, gdy jest bijekcją.

Uwaga: Jeżeli funkcjie $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ są bijekcjami,
to istnieje funkcja odwrotna do $g \circ f$, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Przykład 5.
a) Funkcja $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,\ 1]$ posiada funkcję odwrotną
$f^{-1} : [-1,\ 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f^{-1}(x) = \arcsin x$.

b) Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ nie posiada funkcji odwrotnej,
bo nie jest surjekcją $(f(\mathbb{R}) = (0, +\infty))$.
Funkcja $g : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $g(x) = e^x$ jest bijekcją, więc istnieje funkcja odwrotna do g.
$g^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g^{-1}(x) = \ln x$.



Uwaga: Interpretacja geometryczna:
Jeśli $f : X \to Y$ i $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ i istnieje funkcja f^{-1} odwrotna do f, to wykresy tych funkcji są wzajemnie symetryczne względem prostej o równianiu $y = x$.

Przykład 6. Wyznaczymy funkcję odwrotną do $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = e^{3x-1}$.

Funkcja f jest różnowartościowa, co można łatwo sprawdzić.
Załóżmy, że $f(x_1) = f(x_2)$, czyli $e^{3x_1-1} = e^{3x_2-1}$.

Z własności funkcji wykładniczej wynika, że wykładniki muszą być równe: $3x_1 - 1 = 3x_2 - 1$. Stąd dostajemy $x_1 = x_2$, czyli nie można uzyskać $f(x_1) = f(x_2)$, gdy $x_1 \neq x_2$.

Funkcja f jest surjekcją, gdyż zbiór jej wartości $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$.
Wartości otrzymane jako $y = 3x-1$ wypełniają zbiór $\mathbb{R}$, gdy $x \in \mathbb{R}$, a wartości e^y wypełniają przedział $(0, +\infty)$, gdy $y \in \mathbb{R}$.

Aby wyznaczyć funkcję odwrotną do f wyznaczymy x z równości $y = f(x)$.

$y = e^{3x-1}$

$\ln y = 3x - 1$

$1 + \ln y = 3x$

$x = \dfrac{1+\ln y}{3}.$

Zatem $f^{-1}(y) = \dfrac{1+\ln y}{3}.$

Ostatecznie zapiszemy $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x) = \dfrac{1+\ln x}{3}.$

Permutacje

Jeśli X jest zbiorem skończonym, to bijekcje zbioru X nazywamy **permutacjami**.

Niech $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, permutację $f : X \to X$ zapisujemy: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}$

Składanie permutacji wykonujemy w następujący sposób:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ g(1) & g(2) & \cdots & g(n) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & \cdots & f(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ g(f(1)) & g(f(2)) & \cdots & g(f(n)) \end{pmatrix}$$

Przykład 7. Rozważmy permutacje zbioru 6-elementowego:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Wtedy dostaniemy złożenia:

$$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Permutację odwotną do danej permutacji otrzymamy zamieniając wiersze miejscami i porządkując względem górnego wiersza.

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Obrazy i przeciwobrazy zbiorów

Niech $f : X \to Y$, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$.

Def. **Obrazem zbioru** A wyznaczonym przez funkcję f nazywamy zbiór

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}.$$

Z definicji obrazu wynika, że

$$y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A \;\; y = f(x).$$

Uwagi:

- Dla zbiorów jednoelementowych $f(\{a\}) = \{f(a)\}$.
- Dla zbiorów skończonych mamy $f(\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}) = \{f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)\})$.
- Dla $f : X \to Y$ obraz zbioru X, czyli $f(X)$ jest zbiorem wartości funkcji f (przeciwdziedziną).

Def. **Przeciwobrazem zbioru** B wyznaczonym przez funkcję f nazywamy zbiór

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Z definicji obrazu wynika, że

$$x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

Z powyższego warunku wynika, że dla danych $a \in X$ i $B \subseteq Y$ odpowiedź na pytanie: Czy $a \in f^{-1}(B)$? jest równoważna odpowiedzi na pytanie: Czy $f(a) \in B$?

Uwagi: W przypadku, gdy $f : X \to \mathbb{R}$ zachodzą własności:

- Dla zbiorów jednoelementowych mamy $f^{-1}(\{b\}) = \{x \in X : \; f(x) = b\}$, czyli $f^{-1}(\{b\})$ to zbiór rozwiązań jednego równania.
- Dla zbiorów skończonych mamy $f^{-1}(\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}) = \{x \in X : \; f(x) = b_1 \vee \; f(x) = b_2 \; \vee \ldots \vee \; f(x) = b_n\}$, czyli jest to suma zbiorów rozwiązań pewnej liczby równań.
- Przeciwobrazy przedziałów to zbiory rozwiązań nierówności, np.
  $f^{-1}((-\infty, b) = \{x \in X : \; f(x) < b\}$ $\quad$ $f^{-1}((-\infty, b] = \{x \in X : \; f(x) \leqslant b\}$
  $f^{-1}((a, +\infty) = \{x \in X : \; f(x) > a\}$ $\quad$ $f^{-1}([a, +\infty) = \{x \in X : \; f(x) \geqslant a\}$
  $f^{-1}((a, b) = \{x \in X : \; a < f(x) < b\}$ $\quad$ $f^{-1}([a, b) = \{x \in X : \; a \leqslant f(x) < b\}$

Uwaga: Symbol $f^{-1}(B)$ oznacza przeciwobraz zbioru B wyznaczony przez funkcję f i może być wyznaczony niezależnie od tego, czy istnieje funkcja odwrotna do f. Jeśli taka funkcja by istniała, to wtedy $f^{-1}(B)$ będzie tym samym zbiorem co obraz zbioru B wyznaczony przez funkcję f^{-1}.

Uwaga. Zbiór wartości funkcji $f: X \to Y$ jest obrazem zbioru X wyznaczonym przez f.

Przykład 8. Dla funkcji Dirichleta $\chi_{\mathbb{Q}}: \mathbb{R} \to \{0, 1\}$, $\quad \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{gdy } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

mamy:

$\chi_{\mathbb{Q}}(\{1, 2, 3, \frac{3}{7}\}) = \{1\}$,

$\chi_{\mathbb{Q}}((a,\ b)) = \{0,\ 1\}$, gdzie $(a,\ b)$ – przedział,

$\chi_{\mathbb{Q}}^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

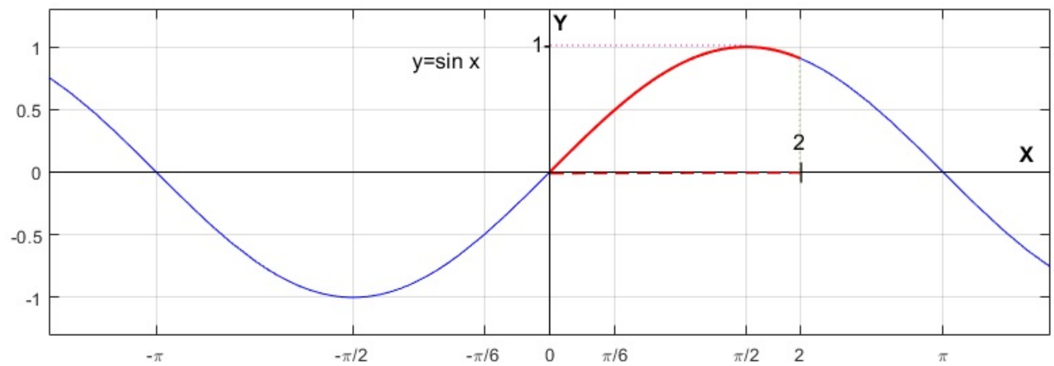
Przykład 9. Dla funkcji $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ mamy:

$f\Big((-\frac{\pi}{6}, \pi]\Big) = (-\frac{1}{2}, 1]$

Aby wyznaczyć obraz przedziału dla funkcji ciągłej, należy wyznaczyć wartości lub granice jednostronne na krańcach przedziału oraz wyliczyć wartości ekstremów osiąganych we wnętrzu przedziału.

$f\Big((0, 2)\Big) = (0, 1]$,

bo $2 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $\sin 2 \in (0, 1)$, $\sin x$ osiąga maksimum o wartości 1 w przedziale $(0, 2)$.



$$f^{-1}([0, 2]) = \{x \in \mathbb{R}:\ 0 \leqslant \sin x \leqslant 2\} = \{x \in \mathbb{R}:\ 0 \leqslant \sin x\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, \pi + 2k\pi]$$

$$f\Big(f^{-1}([0, 2])\Big) = f\Big(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, \pi + 2k\pi]\Big) = [0, 1]$$

$$f^{-1}\Big(f\Big((0, 2)\Big)\Big) = f^{-1}\Big((0, 1]\Big) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, \pi + 2k\pi]$$

Przykład 10. Dla funkcji $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = z^3 + 1$ mamy:

$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, gdyż liczby postaci r^3 wypełniają zbiór $\mathbb{R}$, gdy $r \in \mathbb{R}$, podobnie liczby postaci r^3+1 wypełniają zbiór $\mathbb{R}$ i liczb nierzeczywistych nie możemy uzyskać jako $r^3 + 1$.

$f(\{z \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Re} z = 0\}) = f(\{iy :\ y \in \mathbb{R}\}) = \{(iy)^3 + 1 :\ y \in \mathbb{R}\} =$
$= \{-iy^3 + 1 :\ y \in \mathbb{R}\} = \{1 + it :\ t \in \mathbb{R}\}$ – na płaszczyźnie zespolonej jest to prosta pionowa opisana równaniem $\operatorname{Re} z = 1$.

Czy $j \in f^{-1}(\{1, j\})$?
To pytanie jest równoważne pytaniu: Czy $f(j) \in \{1, j\}$?
Sprawdzamy: $f(j) = j^3 + 1 = 1 - j \notin \{1, j\}$.

Przykład 11. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\quad f(x, y) = x^2 + y^2$.

Czy funkcja f jest injekcją?
Nie jest, bo np. $f(1, 2) = f(-1, 2) = 5$,
można otrzymać tę samą wartość dla różnych argumentów.
Czy funkcja f jest surjekcją?
Nie, bo nie możemy dostać każdej liczby ze zbioru $\mathbb{R}$ jako wartości tej funkcji, nie możemy uzyskać wartości ujemnych.

Przy wyznaczaniu obrazów i przeciwobrazów zbiorów dla funkcji dwóch zmiennych może się okazać ważne, jakie są poziomice funkcji.
Poziomice funkcji to przeciwobrazy zbiorów jednoelementowych.
Poziomica funkcji f dla wartości 0 to zbiór $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 = 0\} = \{(0, 0)\}$ – punkt.
Poziomica funkcji f dla wartości $a > 0$ to zbiór $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 = a\}$ – okrąg o środku $(0, 0)$ i promieniu $r = \sqrt{a}$.

W szczególności dostaniemy:
$f^{-1}(\{-2, 1, 4\}) = f^{-1}(\{-2\}) \cup f^{-1}(\{1\}) \cup f^{-1}(\{4\}) = \emptyset \cup f^{-1}(\{1\}) \cup f^{-1}(\{4\})$ – dwa okręgi o środku w $(0, 0)$ i promieniach: $r_1 = 1,\ r_2 = 2$.

$f^{-1}([1, 4)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \leqslant x^2 + y^2 < 4\}$ – obszar zawarty między okręgami o środkach w $(0, 0)$ i promieniach: $r_1 = 1,\ r_2 = 2$ bez okręgu o promieniu $r_2 = 2$.

$f(\{-1\} \times \mathbb{R}) = \{f(-1, y) :\ y \in \mathbb{R}\} = \{1 + y^2 :\ y \in \mathbb{R}\} = [1, +\infty)$

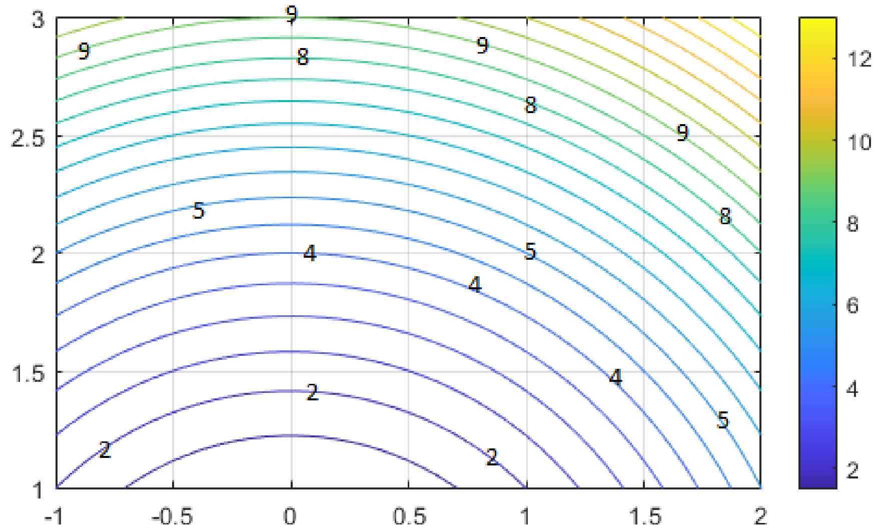
$f(\{-1\} \times [-1, 2]) = \{(-1)^2 + y^2 :\ y \in [-1, 2]\} = [1, 5]$

$f([-1, 2] \times [1, 3]) = [f(0, 1), f(2, 3)] = [1, 13]$

Rozwiązanie graficzne:

Na rysunku widzimy poziomice funkcji f – fragmenty okręgów.

Najmniejsza wartość funkcji jest przyjmowana w punkcie $(0, 1)$, a największa w punkcie $(2, 3)$.



Własności obrazów i przeciwobrazów

Niech $f : X \to Y,\ \ A, B \subseteq X, \quad C, D \subseteq Y$, wtedy

1. $f(\emptyset) = \emptyset$ $\qquad f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ $\qquad f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
3. $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ $\qquad f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$
4. $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ $\qquad f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$
5. $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ $\qquad f(f^{-1}(C)) \subseteq C$

Uwaga. Jeśli $f : X \to Y$ jest różnowartościowa, to dla dowolnych $A, B \subseteq X$

$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \qquad f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B) \qquad A = f^{-1}(f(A))$

Uwaga. Jeśli $f : X \to Y$ jest "na", to $f(f^{-1}(C)) = C$ dla dowolnego $C \subseteq Y$.

Dowód własności $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

$x \in f^{-1}(C \cap D) \ \Leftrightarrow\ f(x) \in (C \cap D) \ \Leftrightarrow\ (f(x) \in C \ \wedge\ f(x) \in D) \ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ (x \in f^{-1}(C) \ \wedge\ x \in f^{-1}(D)) \ \Leftrightarrow\ x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D).$