Relacje

Tematem są relacje, czyli pewne związki pomiędzy obiektami. Zazwyczaj mówimy, że elementy są w relacji, jeśli jest między nimi pewna zależność. Formalnie relacje definiujemy jako podzbiory iloczynu kartezjańskiego zbiorów.

Określenie relacji

Def. ***Relacją n-argumentową*** *nazywamy zbiór* $R \subseteq X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$.

Zbiór $X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n$ *nazywamy* ***polem relacji***.

Jeśli $X_1 = X_2 = \ldots = X_n = X$, *to mówimy o relacji w zbiorze* X.

Przypadki szczególne:

- $n = 1$, wtedy $R \subseteq X$ to relacja 1-członowa, jest to podzbiór zbioru X,
- $n = 2$, to $R \subseteq X \times Y$ nazywamy **relacją binarną**.

Relacje binarne

Relację binarną (dwuargumentową) zazwyczaj rozumiemy jako sposób łączenia elementów pewnego zbioru w pary uporządkowane.

Niech $R \subseteq X \times Y$. Stosujemy równoważne zapisy $(x, y) \in R$ oraz $x\,R\,y$ które czytamy: x jest w relacji R z elementem y.

Wykresem relacji $R \subseteq X \times Y$ nazywamy zbiór wszystkich par (x, y) należących do relacji R.

Definiujemy ponadto:

- **zaprzeczenie relacji *R***: $x \not R\, y \Leftrightarrow \sim (x\,R\,y)$;
- **dziedzina relacji *R*** to zbiór: $domR = d_R := \{x \in X : \exists y \in Y \;\; x\,R\,y\}$;
- **przeciwdziedzina relacji *R*** to zbiór: $d_R^{-1} := \{y \in Y : \exists x \in X \;\; x\,R\,y\}$;
- **relacja odwrotna do *R*** to relacja: $R^{-1} := \{(y, x) \in Y \times X : \; (x, y) \in R\}$,
  $y\,R^{-1}\,x \Leftrightarrow x\,R\,y, \quad d_{R^{-1}} = d_R^{-1}, \quad d_{R^{-1}}^{-1} = d_R$;
- **złożenie relacji *R* i *S***: jeśli $R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$, to $S \circ R = U \subseteq X \times Z$
  $x\,U\,z \Leftrightarrow \exists y \in Y \; (x\,R\,y \wedge y\,S\,z)$.
  Składanie relacji nie jest przemienne, ale jest łączne, to znaczy: $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$.

Relacje szczególne

1. **Relacja pełna** (każdy x jest w relacji z każdym y) – $R = X \times Y$;

2. **Relacja pusta** (żadne elementy nie są w relacji) – $R = \emptyset \subseteq X \times Y$;

3. **Relacja identyczności** (równości) – $I_X = id_X$:

   $I_X \subseteq X \times X, \quad x\, I_X\, y \Leftrightarrow x = y, \quad R \circ I_X = R.$

Przykład 1. Przykładowe relacje w zbiorze $\mathbb{N}$:

a) $xR_1y \ \Leftrightarrow\ x = y$;

b) $xR_2y \ \Leftrightarrow\ x \neq y$;

c) $xR_3y \ \Leftrightarrow\ x \leqslant y$;

d) $xR_4y \ \Leftrightarrow\ x < y$;

e) $xR_5y \ \Leftrightarrow\ x + y = 100$;

f) $xR_6y \ \Leftrightarrow\ x|y$ (x jest dzielnikiem liczby y);

g) $xR_7y \ \Leftrightarrow\ 10|(x - y)$ (x i y mają taką samą cyfrę jedności).

Przykład 2. Przykładowe relacje w zbiorze osób mieszkających obecnie w Polsce:

a) $AS_1B \ \Leftrightarrow$ osoba A jest bratem osoby B;

b) $AS_2B \ \Leftrightarrow$ osoba A jest młodsza od osoby B (osoba A urodziła się co najmniej 5 minut później niż osoba B);

c) $AS_3B \ \Leftrightarrow$ osoby A i B urodziły się w odstępie czasu nieprzekraczającym 365 dni;

d) $AS_4B \ \Leftrightarrow$ osoby A i B urodziły się w tym samym roku kalendarzowym;

e) $AS_5B \ \Leftrightarrow$ osoba A i osoba B mają tę samą matkę;

f) $AS_6B \ \Leftrightarrow$ osoba A i osoba B mają wspólnego dziadka.

Podstawowe własności relacji

Def. *O relacji $R \subseteq X \times X$ mówimy, że jest:*

1. ***zwrotna*** $\Leftrightarrow \forall x \in X \ \ x\, R\, x$

2. ***symetryczna*** $\Leftrightarrow \forall x, y \ \ (x\, R\, y \Rightarrow y\, R\, x)$

3. ***antysymetryczna*** $\Leftrightarrow \forall x, y \ \ [(x\, R\, y \wedge y\, R\, x) \Rightarrow x = y]$

4. ***spójna*** $\Leftrightarrow \forall x, y \ \ (x\, R\, y \vee y\, R\, x \vee x = y)$.

5. ***przechodnia*** $\Leftrightarrow \forall x, y, z \ \ [(x\, R\, y \ \wedge y\, R\, z) \Rightarrow x\, R\, z]$

Przykład 3.

Relacje zwrotne:
równość obiektów, słaba nierówność dla liczb rzeczywistych, podzielność liczb, zawieranie zbiorów, przystawanie figur, podobieństwo figur oraz relacje $R_1, R_3, R_6, R_7, S_3, S_4, S_5, S_6$ z przykładów 1. i 2.

Relacje symetryczne:
równość obiektów, prostopadłość i równoległość prostych, przystawanie figur, podobieństwo figur oraz relacje $R_1, R_2, R_5, R_7, S_3, S_4, S_5, S_7$ z przykładów 1. i 2.
Relacja S_1 nie jest symetryczna, bo np. Adam jest bratem Beaty, a Beata nie jest bratem Adama.

Relacje antysymetryczne:
równość obiektów, nierówność słaba lub ostra dla liczb rzeczywistych, zawieranie zbiorów, podzielność liczb oraz relacje R_1, R_3, R_3, S_2 z przykładów 1. i 2.
Relacja $<$ jest relacją antysymetryczną, bo implikacja $[(x < y \ \wedge \ y < x) \ \Rightarrow \ x = y]$ jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych (poprzednik jest fałszywy).

Relacje spójne:
nierówność słaba i ostra w zbiorze liczb.
Relacja S_2 raczej nie jest spójna, bo pewnie znalazłyby się dwie osoby urodzone w odstępie mniejszym niż 5 minut.

Relacje przechodnie:
równość obiektów, nierówność słaba i ostra, podzielność liczb, zawieranie zbiorów, przystawanie figur, podobieństwo figur, równoległość prostych oraz relacje $R_1, R_3, R_4, R_6, R_7, S_2, S_4, S_5$ z przykładów 1. i 2.
Relacja S_3 nie jest przechodnia, bo możemy wziąć po uwagę np. osoby:
A, osobę B urodzoną 300 dni później niż osoba A oraz osobę C urodzoną 300 dni później niż osoba B. Mamy wtedy AS_3B oraz BS_3C, ale nie zachodzi AS_3C.
Relacja S_6 nie jest przechodnia. Możemy wziąć pod uwagę parę osób A i B mających wspólnego dziadka oraz parę B i C mających wspólnego innego dziadka, który nie jest dziadkiem osoby A.

Uwaga: Jedyna relacja, która jest jednocześnie symetryczna i antysymetryczna, to relacja równości obiektów.

Operacje na relacjach

Niech $R_1, R_2 \subseteq X^2$ – relacje. Definiujemy następujące operacje:

- suma relacji – $R_1 \cup R_2$: $x\,(R_1 \cup R_2)\,y \Leftrightarrow x\,R_1\,y \vee x\,R_2\,y$;
- przecięcie relacji – $R_1 \cap R_2$: $x\,(R_1 \cap R_2)\,y \Leftrightarrow x\,R_1\,y \wedge x\,R_2\,y$;
- dopełnienie relacji – $X^2 \setminus R_1$: $x\,(X^2 \setminus R_1)\,y \Leftrightarrow \sim (x\,R_1\,y)$.

Relacje równoważności

Relacje równoważności pozwalają utożsamiać (grupować) obiekty mające wspólną wybraną cechę.

Def. *Relacja ϱ w zbiorze X jest **relacją równoważności**, jeśli jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.*

Dla obiektów będących w relacji równoważności często stosujemy oznaczenia:

$$x \sim y, \quad x \approx y, \quad x \equiv y$$

i nazywamy je obiektami równoważnymi.

Przykład 4. Przykładowe relacje równoważności:

a) Relacja równości obiektów w pewnym zbiorze X.

b) Relacje R_1, R_7, S_4, S_5 z przykładów 1. i 2.

c) Relacja równoległości prostych na płaszczyźnie, relacja przystawania figur oraz relacja podobieństwa figur.

d) W zbiorze podzbiorów pewnego zbioru n-elementowego relacja:

$A \varrho B \Leftrightarrow A$ i B mają tyle samo elementów.

e) W zbiorze liczb całkowitych relacja $k \sim_p n \;\Leftrightarrow\; p|(k-n)$,
gdzie p jest ustaloną liczbą naturalną, $p \geqslant 2$.
Sprawdzenie, że relacja $\sim_p$ jest relacją równoważności:
(i) zwrotność: $k \sim_p k$ oznacza, że $p|(k-k)$, co zachodzi dla dowolnego $k \in \mathbb{Z}$.

(ii) symetryczność: Warunek $k \sim_p n$ oznacza, ża liczba $k - n$ jest wielokrotnością liczby p. Jeśli tak jest, to liczba $-(k-n) = n-k$ też jest wielokrotnością liczby p, a to oznacza, że $n \sim_p k$.
(iii) przechodniość: Jeśli zachodzi $k \sim_p n$ oraz $n \sim_p l$, czyli obie liczby: $k - n$ oraz $n - l$ są wielokrotnościami p, to również ich suma $k - n + n - l = n - l$ jest wielokrotnością p, co oznacza, że $k \sim_p l$.

Dwie liczby k i n są w relacji $\sim_p$, gdy mają taką samą resztę z dzielenia przez p.
Relację $\sim_p$ nazywamy relacją przystawania modulo p.

f) W zbiorze $X \neq \emptyset$ relacja $\sim_f$ określona za pomocą funkcji $f : X \to Y$

$$x_1 \sim_f x_2 \;\Leftrightarrow\; f(x_1) = f(x_2).$$

Sprawdzenie, że relacja $\sim_f$ jest relacją równoważności:
(i) zwrotność: $x \sim_f x$ oznacza, że $f(x) = f(x)$, co zachodzi dla każdego $x \in X$;
(ii) symetryczność: jeśli $x_1 \sim_f x_2$, czyli $f(x_1) = f(x_2)$, to oczywiście $f(x_2) = f(x_1)$ (co wynika z symetryczności relacji =), a to z kolei oznacza, że $x_2 \sim_f x_1$.
Wynikanie prawdziwe dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$.
(iii) przechodniość: jeśli $x_1 \sim_f x_2$ i $x_2 \sim_f x_3$, czyli $f(x_1) = f(x_2)$ i $f(x_2) = f(x_3)$, to z przechodności relacji = mamy $f(x_1) = f(x_3)$, czyli $x_1 \sim_f x_3$.
Wynikanie prawdziwe dla dowolnych $x_1, x_2, x_3 \in X$.

Relacja równoważności określona w zbiorze X pozwala na **podział** tego zbioru na rozłączne podzbiory - **klasy abstrakcji**. Podział ten wprowadza się następująco: jeśli obiekty są w relacji, to należą do tej samej klasy, a obiekty niebędące w relacji należą do różnych klas.
Proces tworzenia klas - przydzielania obiektów do klas nazywamy **klasyfikacją**.
W matematyce klasyfikacja obiektów jest kluczowa, bo pozwala badać uniwersalne własności obiektów z tej samej klasy oraz daje narzędzia rozróżniania klas.

Jako przykład weźmy zbiór trójkątów na płaszczyźnie i relację podobieństwa trójkątów.
W każdej klasie będą trójkąty podobne do jakiegoś **reprezentanta**.
Takich klas jest nieskończenie wiele, ale możemy wśród nich wyróżnić np. klasę trójkątów równobocznych. Dalej możemy formułować **uniwersalne** twierdzenia dotyczące wszystkich trójkątów równobocznych, mówiące o takich ich własnościach, które nie zależą ani od ich rozmiaru, ani od położenia na płaszczyźnie.

Def. *Niech ϱ – relacja równoważności w zbiorze $X \neq \emptyset$.*

Klasą abstrakcji *elementu $x \in X$ względem relacji ϱ nazywamy zbiór:*

$$[x]_\varrho = \{y \in X :\ y\,\varrho\, x\}, \quad y \in [x]_\varrho \Leftrightarrow y\,\varrho\,x$$

Każdy element $y \in [x]_\varrho$ nazywamy **reprezentantem** tej klasy abstrakcji.

Def. ***Zbiorem ilorazowym relacji*** *ϱ nazywamy zbiór wszystkich klas abstrakcji względem relacji ϱ:*

$$X/_\varrho := \{[x]_\varrho :\ \ x \in X\}$$

Przykład 5. Wyznaczymy klasy abstrakcji dla wybranych relacji z przykładu 4.

- Dla relacji równości obiektów w zbiorze X.
  Niech $x \in X$, wtedy $[x]_= = \{y \in X :\ y = x\} = \{x\}$
  Klasy abstrakcji są jednoelementowe.
  Zbiór ilorazowy ma tyle elementów ile zbiór X.

- Dla relacji S_4 z przykładu 2.
  X - zbiór osób mieszkających obecnie w Polsce.
  $A\ S_4\ B \ \Leftrightarrow$ osoby A i B urodziły się w tym samym roku kalendarzowym;

  $[A]_{S_4}$ = zbiór osób, które urodziły się w tym samym roku co osoba A.
  Wiadomo, że zbiór X jest skończony i ograniczony jest wiek osób, więc jest skończona liczba klas, nie większa niż np. 120, jeśli przyjmiemy, że nie ma osoby w wieku 120 lat ani starszej. Aby wiedzieć więcej, trzeba by znać dane na temat liczby osób urodzonych w kolejnych latach od 1900 roku i żyjących w Polsce.
  Można jeszcze przypuszczać, że większość słuchaczy tego przedmiotu należy do tej samej klasy osób urodzonych w 2001 roku.

- Dla relacji przystawania modulo p w zbiorze liczb całkowitych: $k \sim_p n \ \Leftrightarrow\ p|(k-n)$
  Klasa $[0]_{\sim_p} = \{k \in \mathbb{Z} :\ p|(k-0)\} = p\mathbb{Z}$ – zbiór liczb podzielnych przez p.
  Klasa $[1]_{\sim_p} = \{k \in \mathbb{Z} :\ p|(k-1)\} = \{k \in \mathbb{Z} :\ \exists l \in \mathbb{Z}\ \ k = p\cdot l+1\} = \{p\cdot l+1 :\ l \in \mathbb{Z}\}$ – zbiór liczb, które mają resztę z dzielenia przez p równą 1.
  Różnych klas dla tej relacji będzie p, bo tyle jest możliwych reszt z dzielenia przez $p :\ 0, 1, 2, \ldots, p-1$.
  Do tej samej klasy należą liczby, które mają taką samą resztę z dzielenia przez p.
  Zbiór ilorazowy tej relacji jest p-elementowy, $\mathbb{Z}/_{\sim_p} = \{[0]_{\sim_p}, [0]_{\sim_p}, \ldots, [p-1]_{\sim_p}\}$.
  Wszystkie klasy abstrakcji tej relacji są nieskończone.

- Dla relacji R_7 z przykładu 1.
  Jest to relacja przystawania modulo 10 w zbiorze liczb naturalnych.
  $kR_7n \Leftrightarrow k \sim_{10} n \Leftrightarrow 10|(k-n)$ (k i n mają taką samą ostatnią cyfrę).
  Jest 10 różnych klas abstrakcji tej relacji:
  $[1]_{\sim_{10}} = \{10k+1: k \in \mathbb{N}\}$, $[2]_{\sim_{10}} = \{10k+2: k \in \mathbb{N}\}$, $\ldots$ $[10]_{\sim_{10}} = \{10k: k \in \mathbb{N}\}$.
  Zauważmy, że np. $[1]_{\sim_{10}} = [21]_{\sim_{10}}$, $[7]_{\sim_{10}} = [587]_{\sim_{10}}$.
  Równość klas oznacza, że to są te same zbiory.
  Ta relacja ma szczególne własności, które wykorzystujemy przy dodawaniu i mnożeniu liczb.
  Mianowicie: ostatnia cyfra wyniku dodawania oraz mnożenia liczb naturalnych jest określona przez ostanie cyfry składników (czynników).
  Na przykład dla liczb 38576 i 79547 ostatnia cyfra ich sumy to $3 = (6+7)_{\text{ mod } 10}$,
  a ostatnia cyfra ich iloczynu to $2 = (6 \cdot 7)_{\text{ mod } 10}$.
  Nie potrzebujemy dodawać ani mnożyć tych liczb, możemy się skupić na tym
  co istotne, czyli na ostatnich cyfrach.

Tw. *Jeżeli ϱ jest relacją równoważności w zbiorze X, to:*

1. $\forall x \in X \ \ x \in [x]_\varrho$
2. $\forall x, y \in X \ \ ([x]_\varrho = [y]_\varrho \Leftrightarrow x \, \varrho \, y)$
3. $\forall x, y \in X \ \ ([x]_\varrho \neq [y]_\varrho \Rightarrow [x]_\varrho \cap [y]_\varrho = \emptyset)$
4. $\bigcup_{x \in X} [x]_\varrho = X$
5. $\forall x, y \in X \ \ y \in [x]_\varrho \Rightarrow x \in [y]_\varrho$.

Def. *Niech $X \neq \emptyset$. Rodzinę $\mathcal{A} = \{A_i : \ i \in I\} \subseteq 2^X$ nazywamy* ***podziałem zbioru X****, jeśli spełnione są następujące warunki:*

1. $\forall A_i \in \mathcal{A} \ \ A_i \neq \emptyset$
2. $\forall A_i, A_j \in \mathcal{A} \ \ A_i \neq A_j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$
3. $\bigcup_{i \in I} A_i = X$.

Podział zbioru X to inaczej wybór takich niepustych, parami rozłącznych podzbiorów tego zbioru, których suma jest całym zbiorem X.

Tw. *Jeżeli ϱ jest relacją równoważności w zbiorze X, to zbiór ilorazowy $X/_\varrho$ jest podziałem zbioru X, ponadto jeśli $\mathcal{A}$ jest podziałem zbioru X, to relacja $\varrho_\mathcal{A}$ na zbiorze X określona następująco:*

$$x \,\varrho_\mathcal{A}\, y \Leftrightarrow \exists A_i \in \mathcal{A} \;\; (x \in A_i \wedge y \in A_i)$$

jest relacją równoważności.

Twierdzenie powyższe mówi, że każda relacja równoważności w zbiorze X definiuje podział tego zbioru. Elementami tego podziału są klasy abstrakcji tej relacji.

Ponadto relacja równoważności może być zdefiniowana tak, by była "zgodna" z danym podziałem zbioru.

Przykład 6.

a) Czy istnieje w zbiorze liczb naturalnych taka relacja równoważności, która ma skończoną liczbę klas abstrakcji i wszystkie te klasy są skończone?
Pytanie o istnienie relacji równoważności możemy zastąpić pytaniem o istnienie odpowiedniego podziału zbioru $\mathbb{N}$: Czy można zbiór $\mathbb{N}$ zapisać jako sumę skończonej liczby zbiorów skończonych?
Nie jest to możliwe, bo suma skończonej liczby zbiorów skończonych jest zbiorem skończonym, a zbiór $\mathbb{N}$ jest zbiorem nieskończonym.

b) Czy istnieje w zbiorze liczb naturalnych taka relacja równoważności, która ma nieskończenie wiele klas abstrakcji i wszystkie te klasy są skończone?
Problem równoważny: czy można zdefiniować podział zbioru $\mathbb{N}$ na nieskończenie wiele rozłącznych skończonych podzbiorów?
Można. Na przykład podział na podzbiory jednoelementowe.
Inna możliwość: tworzymy podzbiory 2-elementowe postaci $A_k = \{2k-1, 2k\}$
i mamy wtedy $\mathbb{N} = \{1,2\} \cup \{3,4\} \cup \ldots \cup \{2k-1, 2k\} \cup \ldots$.
Mając taki podział możemy zdefiniować odpowiadającą mu relację równoważności:
$m \sim n \;\Leftrightarrow\; \exists k \in \mathbb{N} \;\; (m \in \{2k-1, 2k\} \;\wedge\; n \in \{2k-1, 2k\})$,
czyli dwie liczby są w relacji, gdy należą do tego samego "kawałka" podziału.
Istnieją oczywiście inne możliwości podziału zbioru $\mathbb{N}$ na nieskończenie wiele parami rozłącznych skończonych podzbiorów, a co za tym idzie można odpowiednio inaczej zdefiniować odpowiadające temu podziałowi relacje równoważności.