Liczby zespolone

Def. **Liczbą zespoloną** nazywamy uporządkowaną parę liczb rzeczywistych (x, y), $x, y \in \mathbb{R}$.
$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1 = x_2 \text{ oraz } y_1 = y_2)$.
Równość liczb zespolonych to równość odpowiednich współrzędnych.

Zbiór wszystkich liczb zespolonych oznaczamy przez $\mathbb{C}$.
W zbiorze tym definiujemy dwa działania: dodawanie i mnożenie.

Niech $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$.

Dodawanie liczb zespolonych: $z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

Mnożenie liczb zespolonych: $z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1)$.

Przykład 1 *Wykonamy działania na liczbach* $z_1 = (1, 2)$, $z_2 = (3, 5)$
$z_1 + z_2 = (1, 2) + (3, 5) = (4, 7)$
$z_1 \cdot z_2 = (1, 2) \cdot (3, 5) = (1 \cdot 3 - 2 \cdot 5, 1 \cdot 5 + 2 \cdot 3) = (-7, 11)$

Dodawanie i mnożenie liczb zespolonych to działania łączne i przemienne,
mnożenie jest rozdzielne względem dodawania.

Liczba $(0, 0)$ nazywana **zerem** jest elementem neutralnym dodawania,
gdyż $(0, 0) + (x, y) = (x, y) + (0, 0) = (x, y)$
a liczba $(1, 0)$ nazywana **jedynką** jest elementem neutralnym mnożenia,
gdyż $(1, 0) \cdot (x, y) = (x, y) \cdot (1, 0) = (x, y)$.

Dla każdej liczby zespolonej $z = (x, y)$ istnieje liczba zespolona **przeciwna** ozn. $-z = (-x, -y)$.

Odejmowanie liczb zespolonych definiujemy następująco:
$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$.

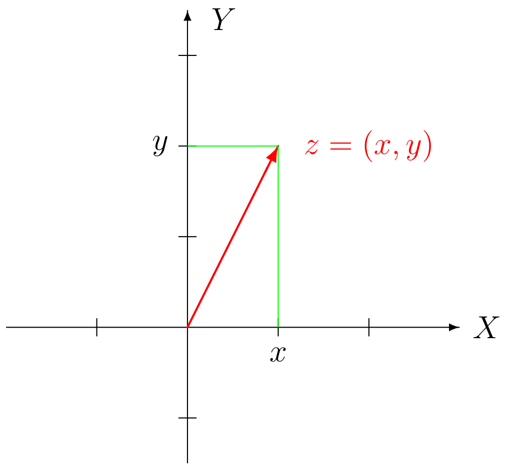
Dla każdej liczby zespolonej $z \neq (0, 0)$ istnieje liczba zespolona do niej **odwrotna** ozn. z^{-1} spełniająca warunek $z \cdot z^{-1} = (1, 0)$. (wyznaczenie odwrotności dalej)

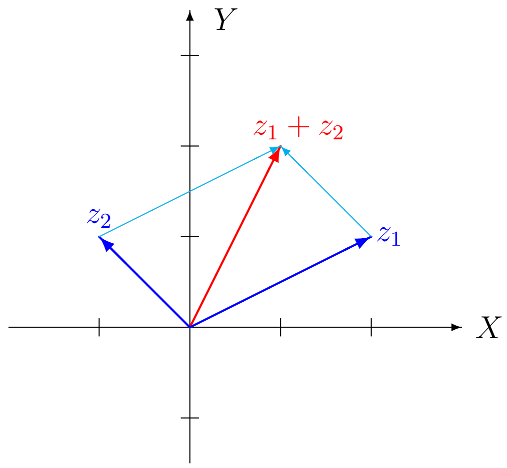
Uwaga: Wyszczególnione wyżej własności działań dodawania i mnożenia w zbiorze liczb zespolonych pozwalają stwierdzić, że algebra $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ jest ciałem (podobnie jak $(\mathbb{R}, +, \cdot)$).

Płaszczyzna zespolona

Płaszczyzna zespolona to model ciała liczb zepolonych $\mathbb{C}$, w którym elementy $z = (x, y)$ traktujemy jak punkty płaszczyzny $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ z ustalonym układem współrzędnych kartezjańskich. Zamiennie elementy (x, y) możemy utoższamiać z wektorami wodzącymi, czyli wektorami zaczepionymi w punkcie $(0, 0)$ o końcu w punkcie o współrzędnych (x, y).

Dodawanie liczb zespolonych interpretujemy jako dodawanie odpowiadających im wektorów na płaszczyźnie zespolonej.





Liczby rzeczywiste

Rozważmy zbiór $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$.
Zauważmy, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi
$(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0)$ oraz $(x, 0) \cdot (y, 0) = (x \cdot y, 0)$.

Możemy traktować liczby zespolone postaci $(x, 0)$ jak liczby rzeczywiste i dalej będziemy je utożsamiać z liczbami rzeczywistymi.

Zbiór $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \in \mathbb{C}$ utożsamiamy ze zbiorem liczb rzeczywistych ($\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$).

Na płaszczyźnie zespolonej liczby rzeczywiste reprezentowane są przez punkty należące do osi odciętych (OX).

Zamiast $(x, 0)$ piszemy x.

Mamy również $0 = (0, 0) \in \mathbb{R}$ oraz $1 = (1, 0) \in \mathbb{R}$,
czyli elementy neutralne działań w zbiorze $\mathbb{C}$ są liczbami rzeczywistymi.

Liczby urojone

Def. Liczbę zespoloną $(0,1)$ nazywamy **jednostką urojoną** i oznaczamy j.

Uwaga: $j^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$, $j \notin \mathbb{R}$
j jest pierwiastkiem kwadratowym z liczby $-1 \in \mathbb{R}$.

Uwaga: Jednostka urojona została po raz pierwszy wykorzystana w XV wieku przez matematyków Cardano i Tartaglię w celu wyprowadzenia wzorów na rozwiązania rzeczywiste równań wielomianowych trzeciego stopnia.

Uwaga: Generalnie matematycy oznaczają jednostkę urojoną literą i. Oznaczenie j stosowane jest częściej przez inżynierów, a liczby zespolone mają istotne zastosowanie w opisie zjawisk fizycznych, szczególnie tych związanych z elektrycznością.

Przykład 2 *Wykonamy obliczenia*
$a \cdot j = (a,0)\cdot(0,1) = (a\cdot 0 - 0\cdot 1, a\cdot 1 + 0\cdot 0) = (0,a)$
$(a\cdot j)\cdot(b\cdot j) = (0,a)\cdot(0,b) = (-ab,0) = -ab \in \mathbb{R}$

Liczbami czysto urojonymi nazywamy wszystkie zespolone liczby postaci yj, gdzie $y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Na płaszczyźnie zespolonej liczby czysto urojone znajdują się na osi rzędnych (OY).

Postać kanoniczna

Wykorzystując własności działań na liczbach zespolonych, otrzymujemy

$$(x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (y,0)\cdot(0,1) = (x,0) + (0,1)\cdot(y,0) = x + j\cdot y.$$

Postać algebraiczna (**kanoniczna**) liczby zespolonej (x,y) to zapis

$$z = x + jy \quad \text{lub} \quad z = x + yj.$$

Działania na liczbach zespolonych w postaci kanonicznej

Działania w postaci kanonicznej wykonuje się jak na rzeczywistych wyrażeniach algebraicznych, uwzględniając fakt, że $j^2 = -1$.

Dla $z_1 = x_1 + jy_1, \quad z_2 = x_2 + jy_2$ mamy

1. $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$

2. $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$

3. $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + x_2y_1)$

4. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} = \dfrac{(x_1 + jy_1)(x_2 - jy_2)}{(x_2 + jy_2)(x_2 - jy_2)} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j\dfrac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$ dla $z_2 \neq 0$.

Uwaga: Wykorzystując własność 4. uzyskamy wzór na odwrotność liczby $z = x + jy$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + jy} = \frac{x - jy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + j\frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Przykład 3 *Wykonamy obliczenia na liczbach* $z_1 = 1 + 2j,\ z_2 = 3 - 4j$

$z_1 + z_2 = 1 + 2j + 3 - 4j = 4 - 2j$

$z_1 - z_2 = 1 + 2j - (3 - 4j) = -2 + 6j$

$z_1 \cdot z_2 = (1 + 2j) \cdot (3 - 4j) = 3 - 4j + 6j - 8j^2 = 3 + 2j + 8 = 11 + 2j$

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1 + 2j}{3 - 4j} = \dfrac{(1 + 2j)(3 + 4j)}{(3 - 4j)(3 + 4j)} = \dfrac{3 + 6j + 4j + 8j^2}{9 - 16j^2} = \dfrac{3 + 10j - 8}{25} = \dfrac{-5 + 10j}{25} = -\dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{5}j$

$z_1^{-1} = \dfrac{1}{1 + 2j} == \dfrac{1 - 2j}{(1 + 2j)(1 - 2j)} = \dfrac{1 - 2j}{1 + 4} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}j$

Wyliczymy jeszcze potęgi liczby j.

$j^0 = 1,\ \ j^1 = j,\ \ j^2 = -1,\ \ j^3 = j^2 \cdot j = -j,\ \ j^4 = j^2 \cdot j^2 = (-1) \cdot (-1) = 1,\ \ j^5 = j^4 \cdot j = j,$ *itd.*

Część rzeczywista liczby zespolonej $z = x + jy$ oznaczana jest $\operatorname{Re} z = x$.

Część urojona liczby zespolonej $z = x + jy$ oznaczana jest $\operatorname{Im} z = y$.

Każda liczba zespolona może być zapisana w postaci

$$z = \operatorname{Re} z + j\operatorname{Im} z$$

Uwaga: $\operatorname{Re} z$ oraz $\operatorname{Im} z$ są liczbami rzeczywistymi (tak, jak x oraz y).

Przykład 4 *Dla liczby* $z_1 = 3 - 7j$ *mamy* $Re\, z = 3, \quad Im\, z = -7,$
dla liczby $z_2 = 3j$ *mamy* $Re\, z = 0, \quad Im\, z = 3.$

Uwaga: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \ \ i \ \ \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$

Uwaga: $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2$ oraz $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2$
dla dowolnych $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Uwaga: Osie układu współrzędnych dla płaszczyzny zespolonej będziemy oznaczać

$\operatorname{Re} z$ zamiast x, $\operatorname{Im} z$ zamiast y i nazywać odpowiednio **osią rzeczywistą** i **osią urojoną**.

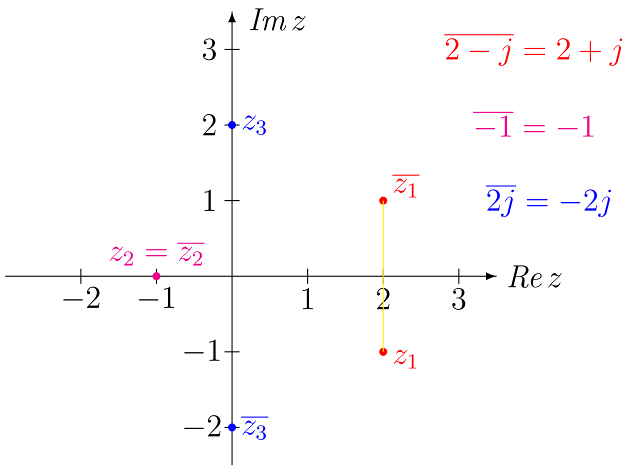
Def. **Sprzężeniem** liczby zespolonej $z = x + jy$, $x, y \in \mathbb{R}$ nazywamy liczbę

$$\overline{z} = x - jy.$$

Mówimy, że liczba $\overline{z}$ jest sprzężona do liczby z.

Interpretacja geometryczna sprzężenia:
Sprzężeniem liczby zespolonej jako punktu na płaszczyźnie zespolonej jest odbicie tego punktu względem osi rzeczywistej.

Przykład 5 *Wyznaczymy sprzężenia liczb* $z_1 = 2 - j$, $z_2 = -1$, $z_3 = 2j$.



Przykład 6 *Rozwiązać równanie* $z + 2\overline{z} = 6 + 5j$.

Niech $z = x + jy$. *Wtedy dostaniemy*
$x + jy + 2(x - jy) = 6 + 5j$, *stąd*

$3x - jy = 6 + 5j$

Porównujemy części rzeczywiste i urojone

Re : $3x = 6$ *Im* : $-y = 5$

Mamy więc $x = 2, y = -5$, *czyli* $z = 2 - 5j$.

Własności sprzężenia Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, wtedy

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$; $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2$; $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$; $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$; $\overline{(\overline{z})} = z$.

Def. **Modułem** liczby zespolonej $z = x + jy$, $x, y \in \mathbb{R}$ nazywamy liczbę $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Przykład 7 *Obliczymy moduły*

$|3 - j| = \sqrt{3^2 + (-1)^1} = \sqrt{10}$
$|-\pi| = \pi$
$|-7j| = \sqrt{0^2 + (-7)^2} = 7$.

Własności modułu Niech $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$, wtedy

$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$; $|z| = |\overline{z}|$; $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$; $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, gdy $z_2 \neq 0$.

Uwaga: Moduł liczby zespolonej jest liczbą rzeczywistą nieujemną.

Uwaga: Dla liczb zespolonych nierówności nie mają sensu. Zbiór $\mathbb{C}$ nie jest uporządkowany tak jak zbior $\mathbb{R}$.

Interpretacja geometryczna

Liczbę $z = x + jy$, możemy przedstawić na płaszczyźnie jako punkt o współrzędnych (x, y).

Moduł liczby z jest odległością tego punktu od punktu $(0, 0)$, czyli liczby zespolonej 0.
Wielkość $|z_1 - z_2|$ jest odległością między liczbami z_1 i z_2.

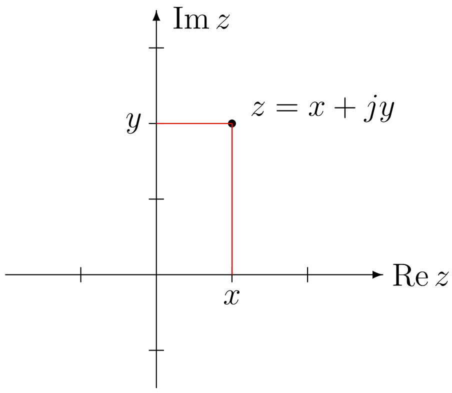
Przykład 8 *Wyznaczyć zbiory liczb zespolonych $z = x + jy$ spełniających podane warunki.*

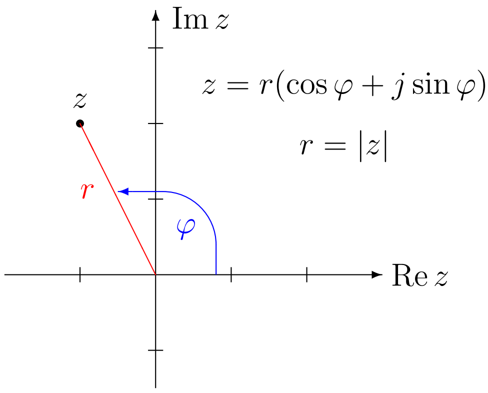
1. $|z| \leqslant 2$
   Warunek podany oznacza, że na płaszczyźnie punkty z są w odległości od 0 nie przekraczającej 2, czyli znajdują się w kole domkniętym o środku w $z_0 = 0$ i promieniu $r = 2$
   $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 \leqslant 4$;
2. $|z + 2j| = 2$
   Zadany warunek jest równoważny $|z - (-2j)| = 2$, czyli punkty z mają odległość równą 2 od punktu $z_0 = -2j$. Oznacza to, że należą do okręgu o środku w $z_0 = -2j$ i promieniu $r = 2$
   $|z + 2j| = |x + j(y + 2)| = \sqrt{x^2 + (y + 2)^2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + (y + 2)^2 = 2^2$;

3. $|z-j| = |z+3j|$
Liczba $|z-j|$ *to odległość punktu* z *od* $z_1 = j$*, a liczba* $|z+3j|$ *to odległość punktu* z *od* $z_2 = -3j$*.*
Podany warunek oznacza, że szukamy punktów równoodległych od z_1 *i* z_2*. Punkty te leżą na symetralnej odcinka łączącego punkty* z_1 *i* z_2*. Obliczenia:*
$|z-j| = |x+jy-j| = \sqrt{x^2+(y-1)^2}, \qquad |z+3j| = |x+jy+3j| = \sqrt{x^2+(y+3)^2}$
Równość $|z-j| = |z+3j|$ *zachodzi, gdy* $x^2+(y-1)^2 = x^2+(y+3)^2$
$x^2+y^2-2y+1 = x^2+y^2+6y+9$
$8y = -8,$ *czyli* $y = -1,\ x \in \mathbb{R}$
Zbiór rozwiązań to prosta określona równaniem $y = -1$ *lub równoważnie* $Im\, z = -1$*.*

Argument liczby zespolonej

Miarę φ kąta skierowanego utworzonego przez dodatnią półoś osi rzeczywistej i odcinek łączący $z \neq 0$ z początkiem układu współrzędnych nazywamy **argumentem** liczby z.
Argument jest określony tylko dla liczb $z \neq 0$.
Zbiór wszystkich argumentów liczby z oznaczamy $\operatorname{Arg} z$.
Argumenty danej liczby zespolonej różnią się o całkowitą wielokrotność liczby 2π.





Argument liczby z nazywamy **argumentem głównym**, jeśli należy do przedziału $(-\pi, \pi]$.

Argument główny oznaczamy $\arg z$.

Uwaga: Argument główny liczby $z \neq 0$ to taka liczba $\varphi \in (-\pi, \pi]$, dla której

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \qquad \sin\varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}.$$

Jeśli $\varphi \in \operatorname{Arg} z$, to zachodzi równość $\dfrac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = \operatorname{tg}\varphi$.

Z powyższej równości możemy wyznaczyć wartości kąta φ z dokładnością do $k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 9 *Obliczyć argumenty podanych liczb.*

1. $z_1 = 5$
   Liczba z_1 leży na dodatniej półosi osi rzeczywistej, więc np. $\varphi = 0$,

   Argumenty liczby z_1 spełniają warunki $\cos\varphi = \dfrac{Re\, z_1}{|z_1|} = \dfrac{5}{5} = 1$ *i* $\sin\varphi = \dfrac{Im\, z_1}{|z_1|} = \dfrac{0}{5} = 0.$
   Stąd $\arg(5) = 0, \qquad \mathrm{Arg}(5) = \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$

   Uwaga: *Wszystkie liczby zespolone leżące na dodatniej półosi osi rzeczywistej mają taki sam argument główny $arg z = 0$.*

2. $z_2 = j\pi$
   Liczba z_2 leży na dodatniej półosi osi urojonej, która tworzy z dodatnią półosią osi rzeczywistej kąt $\frac{\pi}{2}$, więc np. $\varphi = \frac{\pi}{2}$.
   $Re\, z_2 = 0, \quad Im\, z_2 = \pi, \quad |z_2| = \pi$
   Znajdujemy liczby φ spełniające warunki $\cos\varphi = \dfrac{0}{\pi} = 0$ *i* $\sin\varphi = \dfrac{\pi}{\pi} = 1$
   Dostajemy $\arg(j\pi) = \frac{\pi}{2}, \qquad \mathrm{Arg}(j\pi) = \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$

   Uwaga: *Wszystkie liczby zespolone leżące na dodatniej półosi osi urojonej mają taki sam argument główny* $\arg z = \frac{\pi}{2}$.

3. $z_3 = 1 + j$
   Liczba z_3 leży na półprostej określonej warunkami $y = x,\ x > 0$, która tworzy z dodatnią półosią osi rzeczywistej kąt $\frac{\pi}{4}$, więc np. $\varphi = \frac{\pi}{4}$.
   $Re\, z_3 = 1, \quad Im\, z_3 = 1, \quad |z_3| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
   Znajdujemy liczby φ spełniające warunki $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *i* $\sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
   Dostajemy $\arg(1 + j) = \frac{\pi}{4}, \qquad \mathrm{Arg}(1 + j) = \{\frac{\pi}{4} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$

   Uwaga: *Wszystkie liczby zespolone postaci $z = r(1 + j)$, gdzie $r > 0$ mają taki sam argument główny* $\arg z = \frac{\pi}{4}$.

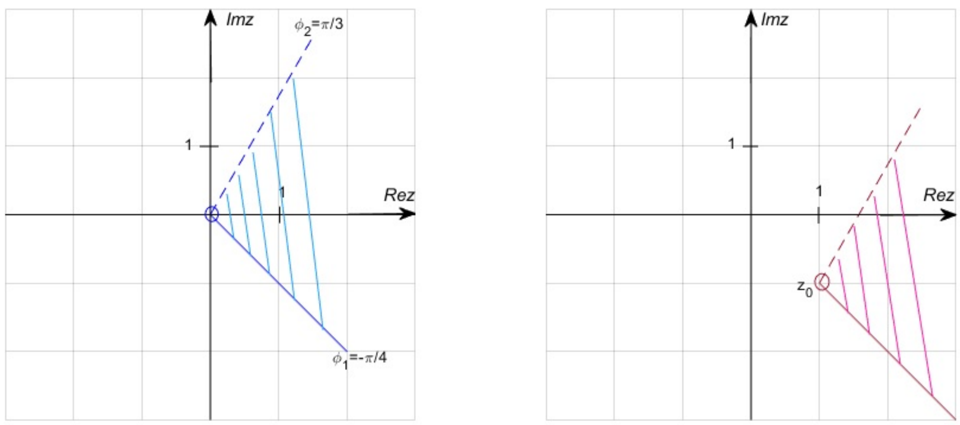
Uwaga: Czasem (w niektórych podręcznikach) przyjmuje się, że argument główny jest liczbą z przedziału $[0, 2\pi)$.

Uwaga: Argument liczby zespolonej 0 nie jest określony. Czasem (w niektórych podręcznikach) przyjmuje się, że argumentem liczby 0 jest 0.

Przykład 10 *Zilustrować na płaszczyźnie zespolonej zbiór liczb zespolonych spełniających warunek*
a) $\arg z \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$
b) $\arg(z - 1 + j) \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$

a) Podany warunek oznacza, że liczby z będą reprezentowane przez punkty z obszaru kąta ograniczonego przez półproste wyprowadzone z punktu 0, dla których argumenty to odpowiednio: $\phi_1 = -\frac{\pi}{4}$, $\phi_2 = \frac{\pi}{3}$

b) W tym przypadku obszar kątowy należy odpowienio przesunąć.
Przyjmijmy $w = z - 1 + j = z - (1 - j) = z - z_0$, $z_0 = 1 - j$.
Wtedy warunek przyjmie postać $\arg w \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$.
Liczby w należą do tego samego zbioru, co liczby z z przykładu a).
Liczby z określone są jako $z = w + z_0$.
Obszar z przykładu a) należy przesunąć równolegle tak, aby wierzchołek kąta znalazł się w $z_0 = 1 - j$.



Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Liczbę zespoloną $z \neq 0$ możemy zapisać jako

$$z = \operatorname{Re} z + j\operatorname{Im} z = |z|\left(\frac{\operatorname{Re} z}{|z|} + j\frac{\operatorname{Im} z}{|z|}\right) = |z|(\cos\varphi + j\sin\varphi),$$

gdzie $\varphi \in Arg z$.

Def. **Postać trygonometryczna** liczby zespolonej $z \neq 0$ to zapis

$$z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi),$$

gdzie $r = |z|$, $\varphi \in \operatorname{Arg} z$.

Uwaga: Postać trygonometryczna liczby zespolonej nie jest określona jednoznacznie.

Niech $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1),\ \ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2),\ \ \ r_1, r_2 > 0,\ \ \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$.

Wówczas $z_1 = z_2 \Leftrightarrow\ (r_1 = r_2\ $ i istnieje $k \in \mathbb{Z}\ $ takie, że $\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi)$

Przykład 11 *Podać postać trygonometryczną podanych liczb.*

1. $z_1 = 5 = 5(1 + 0\cdot j) = 5(\cos 0 + j\sin 0) = 5(\cos(2k\pi) + j\sin(2k\pi)$ *dla pewnego* $k \in \mathbb{Z}$;
2. $z_2 = j = 1(0 + j) = 1(\cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}) = 1(\cos(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) + j\sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi))$;
3. $z_3 = -1 = 1(-1 + 0) = 1(\cos\pi + j\sin\pi) = 1(\cos(\pi + 2k\pi) + j\sin(\pi + 2k\pi))$;
4. $z_4 = -j = 1(0 - j) = 1(\cos\frac{-\pi}{2} + j\sin\frac{-\pi}{2}) = 1(\cos\frac{3\pi}{2} + j\sin\frac{3\pi}{2}) =$
   $= 1(\cos(\frac{-\pi}{2} + 2k\pi) + j\sin(\frac{-\pi}{2} + 2k\pi))$;
5. $z_5 = -1 + j = \sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + j\sin\frac{3\pi}{4}) = \sqrt{2}(\cos(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi) + j\sin(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi))$;
6. $z_6 = 1 - j\sqrt{3} = 2(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2(\cos(\frac{-\pi}{3}) + j\sin(\frac{-\pi}{3})) = 2(\cos(\frac{5\pi}{3}) + j\sin(\frac{5\pi}{3})) =$
   $= 2(\cos(\frac{-\pi}{3} + 2k\pi) + j\sin(\frac{-\pi}{3} + 2k\pi))$

Postać trygonometryczna pozwala na prostą intrerpretację mnożenia liczb zespolonych.

Obliczymy iloczyn liczb $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)$ i $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2)$.

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= r_1\cdot r_2(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2) = \\ &= r_1\cdot r_2\Big(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + j(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\Big) = \\ &= r_1\cdot r_2\Big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\Big). \end{aligned}$$

Oznacza to, że przy mnożeniu liczb zespolonych mnożymy ich moduły, a argumenty dodajemy.

W szczególnym przypadku, gdy wykonujemy mnożenie liczby z przez liczbę o module równym 1, czyli przez liczbę postaci $\cos\alpha + j\sin\alpha$ geometryczna interpretacja mnożenia to obrót liczby z (punktu na płaszczyźnie zespolonej) o kąt α w lewo wokół punktu (liczby) 0.

Działania na liczbach zespolonych w postaci trygonometrycznej

Niech $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1),\quad z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2),\quad z = |z|(\cos\varphi + j\sin\varphi)$

iloczyn: $z_1\cdot z_2 = |z_1|\cdot|z_2|[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$

iloraz: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$

potęgowanie: $z^n = |z|^n[\cos(n\varphi) + j\sin(n\varphi)]$, dla $n \in \mathbb{N}$ (wzór Moivre'a)

sprzężenie: $\overline{z} = |z|(\cos(-\varphi) + j\sin(-\varphi))$

przeciwna: $-z = |z|(\cos(\varphi+\pi) + j\sin(\varphi+\pi))$.

Uwaga: Jeśli $|z| = 1$, to $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$.

Przykład 12 *Wykonać obliczenia, wykorzystując postać trygonometryczną liczby zespolonej.*

1. $(1+j\sqrt{3})(1+j) = 2(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}) \cdot \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}) =$
   $= 2\sqrt{2}\Big(\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}) + j\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4})\Big) = 2\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{12} + j\sin\frac{7\pi}{12})$.

   Wykonując mnożenie w postaci kanonicznej dostaniemy
   $(1+j\sqrt{3})(1+j) = 1-\sqrt{3} + j(1+\sqrt{3})$.

   Porównując części rzeczywiste i urojone uzyskanych wyników dosytaniemy przy okazji

   $\cos\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \quad \sin\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$

2. $Im\Big((-1-j)^{13}\Big) = Im\Big[\Big(\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + j\sin\frac{5\pi}{4})\Big)^{13}\Big] =$

   $= Im\Big[(\sqrt{2})^{13}(\cos\frac{65\pi}{4} + j\sin\frac{65\pi}{4})\Big] = Im\Big[2^{\frac{13}{2}}\Big(\cos(16\pi + \frac{\pi}{4}) + j\sin(16\pi + \frac{\pi}{4})\Big)\Big] =$

   $= Im\Big[2^{\frac{13}{2}}(\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4})\Big] = Im\Big[2^6\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2})\Big] = Im[2^6 + j2^6] = 2^6.$

Postać wykładnicza liczby zespolonej

Wykorzystując narzędzia analizy zespolonej można wprowadzić jeszcze jedną bardzo użyteczną postać liczby zespolonej. Definiując zespoloną funkcję wykładniczą $f(z) = e^z$ można wyprowadzić nastepujące zależności:

Wzory Eulera:

$$e^{x+jy} = e^x \cdot e^{jy}, \quad \text{gdzie} \quad e^{jy} = \cos y + j\sin y, \ (x, y \in \mathbb{R}).$$

Def. **Postać wykladnicza** liczby zespolonej $z \neq 0$ to zapis

$$z = re^{j\varphi},$$

gdzie $r = |z|$, $\varphi \in \operatorname{Arg} z$.

Uwaga: Po wstawieniu $x = 0$, $y = \pi$ do wzoru Eulera dostaniemy $e^{j\pi} = -1$.

Stąd znana równość

$$e^{j\pi} + 1 = 0,$$

wiążąca najważniejsze stałe matematyczne.

Przykład 13 *Podać postać wykładniczą liczb zespolonych.*

1. $z_1 = 7 = 7e^{0j}$
2. $z_2 = -3 = 3e^{j\pi}$
3. $z_3 = 2j = 2e^{\frac{\pi}{2}j}$
4. $z_4 = -\pi j = \pi e^{\frac{3\pi}{2}j} = \pi e^{\frac{-\pi}{2}j}$
5. $z_5 = 1 - j = \sqrt{2}e^{\frac{-\pi}{4}j} = \sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}j}$

Przykład 14 *Wykorzystując postać wykładniczą obliczyć*

$$(1+j)^{22} \cdot (\sqrt{3}-j)^{21} = \left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}j}\right)^{22} \cdot \left(2e^{\frac{-\pi}{6}j}\right)^{21} = 2^{11}e^{\frac{11\pi}{2}j} \cdot 2^{21}e^{\frac{-7\pi}{2}j} = 2^{32}e^{2\pi j} = 2^{32}e^{0j} = 2^{32}.$$

Pierwiastki z liczb zespolonych

Niech $n \in \mathbb{N}$.

Def. Liczbę $t \in \mathbb{C}$ nazywamy **pierwiastkiem stopnia** n z liczby $z \in \mathbb{C}$, jeśli $t^n = z$.

Uwaga: Dla dowolnego n jedynym pierwiastkiem stopnia n z liczby 0 jest 0.

Twierdzenie.
Jeśli $z \neq 0$, to istnieje dokładnie n różnych pierwiastków stopnia n z liczby z. Pierwiastki stopnia $n \in \mathbb{N}$ z liczby $z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$, $r \in \mathbb{R}_+$, $\varphi \in \mathbb{R}$, wyrażają się wzorami:

$$t_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + j\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Wyprowadzenie wzorów:

Niech $z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$. Szukamy takich $t = r_t(\cos\alpha + j\sin\alpha)$,
dla których zachodzi $t^n = z$, czyli
$\left(r_t(\cos\alpha + j\sin\alpha)\right)^n = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$.
Stąd $r_t^n(\cos\alpha + j\sin\alpha)^n = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$
i dalej równość $r_t^n(\cos n\alpha + j\sin n\alpha) = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$,
która zachodzi, gdy równe są moduły liczb po obu stronach, czyli $r_t^n = r$,
a dla argumentów zachodzi związek: $n\alpha = \varphi + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.
Ostatecznie dostajemy $r_k = \sqrt[n]{r}$, (pierwiastek rzeczywisty z r stopnia n) $\alpha = \frac{\varphi+2k\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$.

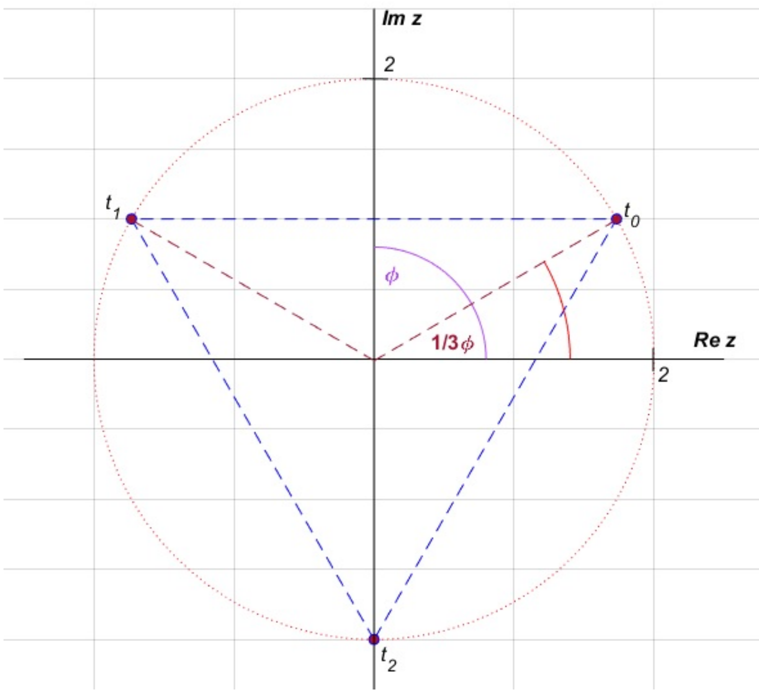
Pierwiastek stopnia n z liczby zespolonej $z \neq 0$, który ma najmniejszy nieujemny argument nazywamy **pierwiastkiem głównym** stopnia n z liczby z.

Uwaga: Pierwiastki stopnia $n \geqslant 2$ z liczby zespolonej $z \neq 0$ znajdują się na okręgu o środku w 0 i promieniu równym $\sqrt[n]{|z|}$, i dzielą ten okrąg na n równych łuków.

Symbolem $\sqrt[n]{z}$ oznaczamy zbiór wszystkich pierwiastków n-tego stopnia z liczby z.
$\sqrt[n]{z} = \{t \in \mathbb{C} : \ t^n = z\}$

Przykład 15 *Wyznaczymy pierwiastki 3-ciego stopnia z liczby* $z = 8j = 8 \cdot (\cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2})$.
Moduł liczby $z = 8j$ *jest równy* 8, *więc moduł liczb* $\sqrt[3]{8j}$ *jest równy* 2.
Argument liczby $z = 8j$ *jest równy* $\varphi = \frac{\pi}{2}$, *więc argument jednego z pierwiastków* 3-*ciego stopnia z liczby* z *jest równy* $\frac{\varphi}{3} = \frac{\pi}{6}$.
Stąd dostajemy pierwiastek główny: $t_0 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6})$.
Argumenty pozostałych dwóch pierwiastków różnią się od $\frac{\pi}{6}$ *o wielokrotność kąta* $\frac{2\pi}{3}$.

Trzem pierwiastkom $\sqrt[3]{8j}$ *odpowiadają na płaszczyźnie zespolonej punkty będące wierzchołkami trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg o środku w* 0 *i promieniu* $r = 2$, *takiego którego jednym z wierzchołków jest punkt* t_0.



Obliczenia:
$t_0 = \sqrt[3]{8}(\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6}) = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j) = \sqrt{3} + j$
$t_1 = \sqrt[3]{8}\Big(\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}) + j\sin(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3})\Big) = 2\Big(\cos(\frac{5\pi}{6}) + j\sin(\frac{5\pi}{6})\Big) = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} = -\sqrt{3} + j$
$t_2 = \sqrt[3]{8}\Big(\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}) + j\sin(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3})\Big) = 2\Big(\cos(\frac{3\pi}{2}) + j\sin(\frac{3\pi}{2})\Big) = 2(0 - j) = -2j$
Zbiór pierwiastków: $\sqrt[3]{1} = \{\sqrt{3} + j, -\sqrt{3} + j, -2j\}$.

Przykład 16 *Wyznaczymy pierwiastki 3-ciego oraz 4-tego stopnia z liczby* $z = 1 = 1 \cdot (\cos 0 + j \sin 0)$.

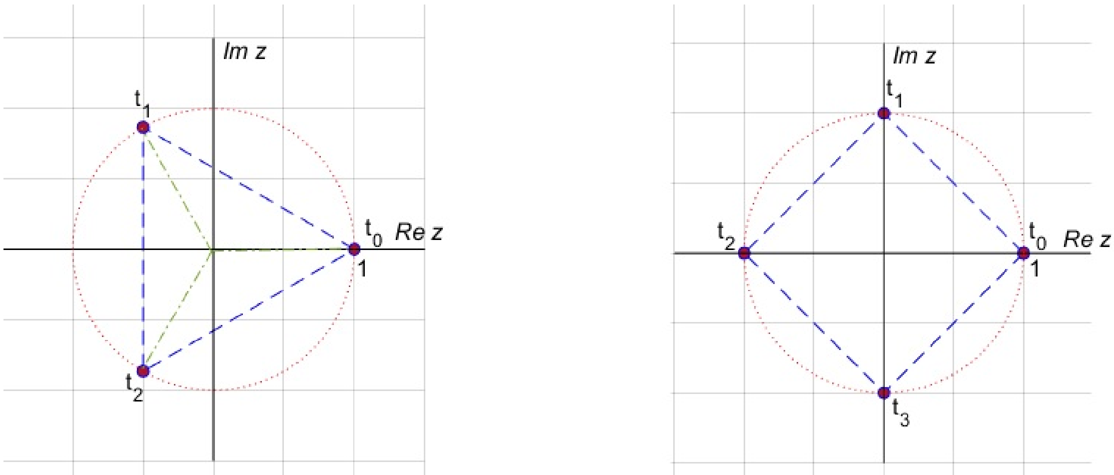
$$\sqrt[3]{1}: \ t_0 = \sqrt[3]{1}(\cos\tfrac{0}{3} + j\sin\tfrac{0}{3}) = 1$$
$$t_1 = \sqrt[3]{1}\Big(\cos(\tfrac{0}{3}+\tfrac{2\pi}{3}) + j\sin(\tfrac{0}{3}+\tfrac{2\pi}{3})\Big) = \Big(\cos(\tfrac{2\pi}{3}) + j\sin(\tfrac{2\pi}{3})\Big) = -\tfrac{1}{2} + j\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$
$$t_2 = \sqrt[3]{1}\Big(\cos(\tfrac{0}{3}+\tfrac{4\pi}{3}) + j\sin(\tfrac{0}{3}+\tfrac{4\pi}{3})\Big) = \Big(\cos(\tfrac{4\pi}{3}) + j\sin(\tfrac{4\pi}{3})\Big) = -\tfrac{1}{2} - j\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

Zbiór pierwiastków: $\sqrt[3]{1} = \{1, -\tfrac{1}{2} + j\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{1}{2} - j\tfrac{\sqrt{3}}{2}\}$.

$$\sqrt[4]{1}: \ t_0 = \sqrt[4]{1}(\cos\tfrac{0}{4} + j\sin\tfrac{0}{4}) = 1$$
$$t_1 = \sqrt[4]{1}\Big(\cos(\tfrac{0}{4}+\tfrac{2\pi}{4}) + j\sin(\tfrac{0}{4}+\tfrac{2\pi}{4})\Big) = \Big(\cos(\tfrac{\pi}{2}) + j\sin(\tfrac{\pi}{2})\Big) = j$$
$$t_2 = \sqrt[4]{1}\Big(\cos(\tfrac{0}{4}+\tfrac{4\pi}{4}) + j\sin(\tfrac{0}{4}+\tfrac{4\pi}{4})\Big) = \Big(\cos(\pi) + j\sin(\pi)\Big) = -1$$
$$t_3 = \sqrt[4]{1}\Big(\cos(\tfrac{0}{4}+\tfrac{6\pi}{4}) + j\sin(\tfrac{0}{4}+\tfrac{6\pi}{4})\Big) = \Big(\cos(\tfrac{3\pi}{2}) + j\sin(\tfrac{3\pi}{2})\Big) = -j$$

Zbiór pierwiastków: $\sqrt[4]{1} = \{1, j, -1, -j\}$.

$\sqrt[3]{1} = \{1, -\tfrac{1}{2} + j\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{1}{2} - j\tfrac{\sqrt{3}}{2}\}$ $\qquad$ $\sqrt[4]{1} = \{1, j, -1, -j\}$



Pierwiastki n-tego stopnia z 1 będziemy umownie oznaczać symbolami ω_k, $\quad (0 \leqslant k \leqslant n-1)$.

$$\omega_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + j\sin\frac{2k\pi}{n} = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + j\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k = \omega_1^k$$

Uwaga: Zbiór wszystkich pierwiastków stopnia n z 1 oznaczamy $\mathbb{C}_n$.

Algebra $(\mathbb{C}_n, \cdot)$ jest grupą.

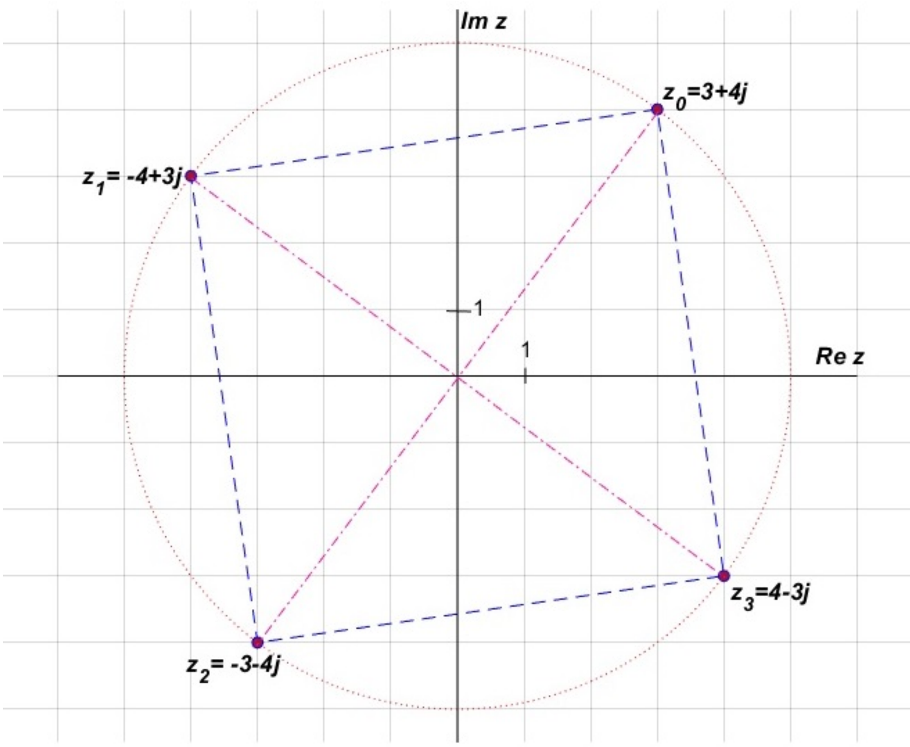
W szczególności iloczyn pierwiastków n-tego stopnia z 1 też jest pierwiastkiem n-tego stopnia z 1, podobnie jak odwrotność pierwiastka n-tego stopnia z 1.

Uwaga: Suma wszystkich pierwiastków stopnia $n \geqslant 2$ z 1 jest równa 0.
Iloczyn wszystkich pierwiastków stopnia $n \geqslant 2$ z 1 jest równy $(-1)^{n-1}$.

Fakt. Niech $t \in \mathbb{C}$ będzie dowolnym pierwiastkiem stopnia n z liczby $z \neq 0$.
Wówczas $\sqrt[n]{z} = \{t \cdot \omega_k : k \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leqslant k \leqslant n-1\}$.

Z powyższego faktu wynika, że znając jeden z pierwiastków n-tego stopnia z liczby z możemy wyznaczyć pozostałe, mnożąc go przez pierwiastki n-tego stopnia z 1.

Przykład 17 *Znaleźć wszystkie rozwiązania równania* $z^4 = (2+j)^8$.
Zauważmy, że $z^4 = \left[(2+j)^2\right]^4$,
więc jednym z rozwiązań jest liczba $z_0 = (2+j)^2 = 3+4j$.
Liczba z_0 *jest jednocześnie jednym z pośród czterech pierwiastków* $\sqrt[4]{(2+j)^8}$.
Uzyskamy je, mnożąc z_0 *przez pierwiastki 4-tego stopnia z 1, czyli liczby:* $1, j, -1, -j$.
$z_1 = j \cdot z_0 = j(3+4j) = -4+3j$
$z_2 = (-1) \cdot z_0 = -3-4j$
$z_3 = (-j) \cdot z_0 = -j(3+4j) = 4-3j$.
W interpretacji geometrycznej mnożeniu przez pierwiastki 4-tego stopnia z 1 odpowiada obrót punktów wokół 0 *o kąt* $\frac{\pi}{2}$ *w lewo.*



W dotychczasowych przykładach wyznaczania pierwiastków z liczby z była prosta sytuacja: znaliśmy postać trygonometryczną liczby z lub znaliśmy jeden z pierwiastków. Generalnie nie zawsze tak będzie.

Przykład 18 *Wyznaczyć* $\sqrt[3]{1+3j}$.
Musimy wyznaczyć moduł i argument φ *liczby* $z = 1+3j$.
$|z| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$
$\cos\varphi = \frac{Re\,z}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \sin\varphi = \frac{Im\,z}{|z|} = \frac{3}{\sqrt{10}}$.
Stąd, uwzględniając, że z *jest w I ćwiartce płaszczyzny, dostaniemy* $\varphi = \arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}$.
Następnie wyznaczamy pierwiastki:
$t_0 = \sqrt[3]{|z|}(\cos\frac{\varphi}{3} + j\sin\frac{\varphi}{3}) = \sqrt[6]{10}\Big(\cos(\frac{1}{3}\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}) + j\sin(\frac{1}{3}\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}})\Big)$.
Kolejne pierwiastki dostaniemy mnożąc t_0 *przez* $\sqrt[3]{1}$, *czyli przez liczby* $-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}$.
$t_1 = t_0 \cdot (-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2})$
$t_2 = t_0 \cdot (-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2})$
Można oczywiście te obliczenia wykonać numerycznie przy użycia narzędzia obliczeniowego.

Pierwiastki kwadratowe liczby zespolonej

Pierwiastki kwadratowe możemy wyznaczyć wykorzystując wzory na pierwiastki stopnia n dla $n = 2$.

Liczba $z \neq 0$ posiada dwa pierwiastki - są to liczby przeciwne.

Pierwiastki kwadratowe możemy też wyznaczyć korzystając z postaci kanonicznej liczby z.

Dla $z = x+jy$ szukamy $t = a+jb$ takiego, że $t^2 = z$.

Dostajemy do rozwiązania równanie $(a+jb)^2 = x+jy$.

$a^2 + 2jab - b^2 = x+jy$

Porównujemy części rzeczywiste i urojone dla obu stron równości.

(1) $a^2 - b^2 = x$

(2) $2ab = y$

Wykorzystamy jeszcze równość modułów liczb t^2 i z.

$|t^2| = a^2+b^2, \qquad |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

(3) $a^2+b^2 = \sqrt{x^2+y^2}$.

Dodając równania (1) i (3) wyznaczymy a i następnie obliczymy y wykorzystując równanie (2).

Przykład 19 *Wyznaczyć* $\sqrt{3-4j}$.
Szukamy $t = a+bj$ *spełniającego warunki* $t^2 = 3-4j, \quad |t^2| = |3-4j| = 5$

Dostajemy równania:
(1) $a^2 - b^2 = 3$
(2) $2ab = -4$
(3) $a^2 + b^2 = 5$
Z (1)+(2) mamy $2a^2 = 8 \quad \Rightarrow \quad a = \pm 2$
Z (3)-(1) mamy $2b^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad b = \pm 1$
Uwzględniając (2) $ab = -2$ *dostaniemy rozwiązania*
$a_1 = 2,\ b_1 = -1$ *lub* $a_2 = -2,\ b_2 = 1.$
Ostatecznie $t_1 = 2 - j,\ t_2 = -2 + j.$

Na koniec jeszcze przykład wykorzystania postaci wykładniczej do rozwiązywania równań.

Przykład 20 *Wykorzystując postać wykładniczą rozwiązać równanie* $z^5 = 8\overline{z}^2$.

Postać wykładniczą możemy zapisać dla liczby $z \neq 0$*, więc osobno rozważamy przypadek* $z = 0$.
Sprawdzamy, że $0^5 = 8 \cdot \overline{0}^2$*, więc* 0 *jest jednym z rozwiązań.*
Dla $z \neq 0$ *przyjmujemy* $z = re^{\varphi j}$.
Mamy więc $z^5 = \left(re^{\varphi j}\right)^5 = r^5 e^{5\varphi j}, \quad \overline{z} = re^{-\varphi j}, \quad \overline{z}^2 = \left(re^{-\varphi j}\right)^2 = r^2 e^{-2\varphi j}.$
Wstawiamy do równania i dostajemy
$r^5 e^{5\varphi j} = 8r^2 e^{-2\varphi j}.$
Warunek na moduły: $r^5 = 8r^2,\ r \in \mathbb{R}_+ \quad \Rightarrow \quad r = 2.$
Warunek na argumenty: $5\varphi = -2\varphi + 2k\pi$ *dla* $k \in \mathbb{Z}$
stąd $7\varphi = 2k\pi$*, czyli* $\varphi = \frac{k}{7} \cdot 2\pi$ *dla* $k \in \mathbb{Z}$.
Wystarczy wziąć $k = 0, 1, \ldots, 6$*, bo dla innych* $k \in \mathbb{Z}$ *rozwiązania będą się powtarzać.*
Ostatecznie rozwiązania to 0*,* $z_k = 2 \cdot e^{\frac{k}{7} \cdot 2\pi j}$ *dla* $k \in \{0, 1, \ldots, 6\}$.
W interpretacji geometrycznej niezerowe rozwiązania to wierzchołki 7-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 2 i o środku w 0, takie że jednym z wierzchołków jest $z_0 = 2$.

Uwaga: Gdy rozwiązujemy równania z liczbami zespolonymi, gdzie występuje z lub $\overline{z}, |z|$ w potędze wyższej niż 2, wygodniej zazwyczaj będzie używać postaci wykładniczej lub trygonometrycznej liczby z, a nie kanonicznej.