Rachunek zdań

Zdanie logiczne jest to zdanie oznajmujące, któremu można przypisać określoną wartość logiczną (prawdy lub fałszu).

W logice klasycznej zdania dzielimy na prawdziwe (przypisujemy im wartość 1) oraz fałszywe (o wartości logicznej 0).
Będziemy używać zapisu $w(p) = 1$, gdy p jest zdaniem prawdziwym,
$w(p) = 0$, gdy p jest zdaniem fałszywym.

Przykład 0.

- "Dwa plus dwa równa się cztery." jest zdaniem logicznym.

  Na gruncie zwykłej arytmetyki przypiszemy mu wartość logiczną 1.

- "Ala ma kota." jest zdaniem logicznym.

  Wartość logiczna tego zdania powinna odzwierciedlać naszą wiedzę na temat tego, czy Ala ma kota.

  To jaką wartość logiczną przypiszemy danemu zdaniu zależy od nas!

- "Czy to jest zrozumiałe?" nie jest zdaniem logicznym.

- "Ach, jak tu pięknie!", "Otwórz okno!" nie są zdaniami logicznymi.

- Jeśli wiadomo, że $x \in \mathbb{R}$ to zdanie "$x > 0$" nie jest zdaniem logicznym.

  Problem w tym, że nie możemy przypisać mu jednoznacznej wartości logicznej, gdyż zależy ona od wartości zmiennej x.

- "To zdanie jest fałszywe.", "Ja teraz kłamię." też nie są zdaniami logicznymi.

  To antynomie, czyli zdania prowadzące do sprzeczności logicznej. Istotnie, jeśli przyjąć, że "To zdanie jest fałszywe." ma wartość logiczną 1, to wywnioskujemy z niego, że jest ono fałszywe, czyli ma wartość logiczną 0 – sprzeczność. Analogicznie nie możemy przypisać temu zdaniu wartości logicznej 0.

W celu tworzenia złożonych zdań logicznych używa się **funktorów zdaniotwórczych** (inaczej nazywanych **spójnikami logicznymi**).

Podstawowe funktory zdaniotwórcze to:

negacja	$\sim, \neg$	"nieprawda, że"
koniunkcja	$\wedge$	"i"
alternatywa	$\vee$	"lub"
implikacja	$\Rightarrow$	"jeśli...to..."
równoważność	$\Leftrightarrow$	"wtedy i tylko wtedy, gdy"

Tabele wartościowania dla spójników

p	$\sim p$
1	0
0	1

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Negacja, czyli "nieprawda, że". Oznaczenie: $\sim, \neg$

Jeśli zdanie p jest prawdziwe to $\sim p$ jest fałszywe;
jeśli zdanie p jest fałszywe to $\sim p$ jest prawdziwe.

Przykład 1.

1. "$\sim$ Dwa plus dwa równa się siedem." oznacza zdanie "Nieprawda, że dwa plus dwa równa się siedem."
2. $\sim\ 2 < 1$ jest równoważne zdaniu $2 \geqslant 1$.
3. $\sim\ -3 \neq 1$ jest równoważne zdaniu $-3 = 1$.

Koniunkcja, czyli "i" Oznaczenie: $\wedge$

Koniunkcja zdań p i q jest prawdziwa jedynie w przypadku, gdy oba zdania p i q są prawdziwe; w pozostałych przypadkach jest fałszywa.

Przykład 2.

1. "Ala ma kota. $\wedge$ Jest pochmurno." oznacza zdanie "Ala ma kota i jest pochmurno."

2. $2 > 1 \wedge -3 > 1$ oznacza zdanie, które słownie możemy zapisać jako "Liczby 2 i -3 są (obie) większe od liczby 1."

Wartość logiczna zdania z przykładu 2.2 jest równa 0, zdanie jest fałszywe.

Alternatywa, czyli "lub" Oznaczenie: $\bigvee$

Alternatywa zdań p i q jest fałszywa jedynie w przypadku, gdy oba zdania p i q są fałszywe; w pozostałych przypadkach jest prawdziwa.

Przykład 3.

1. "Ala ma kota. $\vee$ Jest pochmurno." oznacza zdanie "Ala ma kota lub jest pochmurno."
2. $2 > 1 \vee -3 > 1$ oznacza zdanie, które słownie możemy zapisać jako "Liczba 2 lub liczba -3 jest większa od liczby 1."

Wartość logiczna zdania z przykładu 3.2 jest równa 1, zdanie jest prawdziwe.

Implikacja, czyli "jeśli ... to ...". Oznaczenie: $\Rightarrow$

Implikacja $p \Rightarrow q$ jest fałszywa jedynie w przypadku, gdy zdanie p jest prawdziwe, a zdanie q jest fałszywe; w pozostałych przypadkach jest prawdziwa.

W implikacji $p \Rightarrow q$ zdanie p nazywamy **poprzednikiem implikacji**, zdanie q - **następnikiem**.

Przykład 4.

1. "Ala ma kota. $\Rightarrow$ Jest pochmurno." oznacza zdanie "Jeśli Ala ma kota to jest pochmurno.", które możemy też zapisać "To, że Ala ma kota implikuje, że jest pochmurno."
2. $1 > 2 \;\Rightarrow\; -3 > 1$ oznacza zdanie, które słownie możemy zapisać jako "Jeśli liczba 1 jest większa od liczby 2, to liczba -3 jest większa od liczby 1."

Zdanie z przykładu 4.2 jest prawdziwe.

O ile wartości logiczne dla wcześniej zdefiniowanych funktorów logicznych nie budzą zasadniczych wątpliwości, dla implikacji nie są na pierwszy rzut oka zupełnie jasne.

Aby uzasadnić podaną definicję rozważmy, prawdziwe dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$, zdanie

$$"4|n \Rightarrow 2|n"$$

czyli "Jeśli liczba n jest podzielna przez 4, to jest podzielna przez 2." Zauważmy teraz, że

- dla $n = 2$ poprzednik ma wartość logiczną 0, następnik 1;
- dla $n = 3$ poprzednik ma wartość logiczną 0, następnik 0;
- dla $n = 4$ poprzednik ma wartość logiczną 1, następnik 1.

To pokazuje, że przyjęta przez nas definicja implikacji jest zgodna z oczekiwaniami.

Jeśli prawdziwa jest implikacja $p \Rightarrow q$, to mówimy, że p jest **warunkiem wystarczającym** dla q oraz q jest **warunkiem koniecznym** dla p.

Dla danej implikacji $p \Rightarrow q$ (którą nazywamy **prostą**),
implikację $q \Rightarrow p$ nazywamy **odwrotną**,
$(\sim p) \Rightarrow (\sim q)$ nazywamy **przeciwną**,
$(\sim q) \Rightarrow (\sim p)$ nazywamy **przeciwstawną**.

Przykład 5.
Rozważmy zdania:
$p =$ "Student zdał egzamin z MAKO1 i uzyskał łącznie powyżej 50 punktów z przedmiotu."
$q =$ "Student zaliczył przedmiot MAKO1."
Wykładowca wypowiada zdanie: $p \Rightarrow q$ (uznajemy, że jest ono prawdziwe)
Warunek ze zdania p jest warunkiem wystarczającym dla q, czyli wystarczy do zaliczenia przedmiotu.
Wypowiedziane przez wykładowcę zdanie $p \Rightarrow q$ nie oznacza, że warunek p jest konieczny do zaliczenia przedmiotu. Niewykluczone są okoliczności pozwalające na zaliczenie przedmiotu przy spełnieniu innych warunków.

Gdyby wykladowca wypowiedział zdanie $\sim p \Rightarrow \sim q$, to student nie miałby pewności,
że spełniając warunek p uzyska zaliczenie przedmiotu.
Zdanie $\sim p \Rightarrow \sim q$ nie rozstrzyga, co się stanie, gdy zajdzie p, a mówi jedynie co się stanie, gdy zajdzie $\sim p$.

Równoważność, czyli "wtedy i tylko wtedy, gdy". Oznaczenie: $\Leftrightarrow$

Równoważność $p \Leftrightarrow q$ jest prawdziwa jedynie w przypadku, gdy zdania p i q mają tę samą wartość logiczną; w pozostałych przypadkach jest fałszywa.

Przykład 6.

1. "Ala ma kota. $\Leftrightarrow$ Jest pochmurno." oznacza zdanie "Ala ma kota wtedy i tylko wtedy, gdy jest pochmurno.", które możemy też zapisać "To, że Ala ma kota jest równoważne temu, że jest pochmurno."
2. $2 > 1 \Leftrightarrow -3 > 1$ oznacza zdanie, które słownie możemy zapisać jako "2 jest większa od liczby 1 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba -3 jest większa od liczby 1."

Zdanie z Przykładu 6.2 jest fałszywe.

Jeśli prawdziwa jest równoważność $p \Leftrightarrow q$, to mówimy, że p jest **warunkiem koniecznym i wystarczającym** dla q.

Przykład 7. Określimy wartość logiczną zdań:

1. $w\Big[((\sim 5 \neq 1) \Leftrightarrow \sin\pi = 0) \Rightarrow \sqrt{2} > 1\Big] =$
   $= w\Big(((\sim 1) \Leftrightarrow 1) \Rightarrow 1\Big) = w\Big((0 \Leftrightarrow 1) \Rightarrow 1\Big) = w\Big(0 \Rightarrow 1\Big) = 1$ – prawdziwe
2. $w\Big[(\sim 5 \neq 1) \Leftrightarrow (\sin\pi = 0 \Rightarrow \sqrt{2} > 1)\Big] =$
   $= w\Big((\sim 1) \Leftrightarrow (1 \Rightarrow 1)\Big) = w\Big(0 \Leftrightarrow 1\Big) = 0$ – fałszywe
3. $w\Big[(\sim (5 \neq 1 \Leftrightarrow \sin\pi = 0)) \Rightarrow \sqrt{2} > 1\Big] =$
   $= w\Big(\sim (1 \Leftrightarrow 1) \Rightarrow 1\Big) = w\Big((\sim 1) \Rightarrow 1\Big) = w\Big(0 \Rightarrow 1\Big) = 1$ – prawdziwe

Głównym celem wprowadzenia rachunku zdań i praw logiki jest możliwość przeprowadzania precyzyjnych *rozumowań dedukcyjnych*. Rozbudowane rozumowanie dedukcyjne prowadzi do sformułowania *twierdzenia* (lub jeśli ma ono mniejszą wagę *stwierdzenia* albo *lematu*). Najczęściej twierdzenie ma postać implikacji, w której poprzednik nazywamy **założeniem**, a następnik **tezą** twierdzenia.

Korzystanie z twierdzeń opiera się na przekonaniu o ich prawdziwości
(zazwyczaj zostały wcześniej udowodnione).

Gdy chcemy skorzystać z twierdzenia typu: Założenie $\Rightarrow$ Teza
musimy sprawdzić, czy spełnione są założenia. Jeśli tak jest, mamy pewność, że zajdzie teza.

Jeśli założenia nie są spełnione, twierdzenie ciągle jest prawdziwe, jako implikacja: $0 \Rightarrow$ Teza.

Prawa rachunku zdań

Tautologiami - prawami rachunku zdań nazywamy formuły, które są prawdziwe niezależnie od wartości logicznej zdań składowych, które w nich występują.

Zdania logiczne Φ i Ψ są **równoważne**, jeśli zdanie $\Phi \Leftrightarrow \Psi$ jest tautologią.

Przykład 8. Sprawdźmy, czy jest tautologią formuła $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$.

Rozwiązanie 1. Można to zrobić przy pomocy metody zero-jedynkowej:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$r = (p \Rightarrow q)$	$s = (r \wedge \sim q)$	$s \Rightarrow \sim p$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1

Ponieważ w ostatniej kolumnie (która odzwierciedla wartości logiczne formuły z przykładu) pojawiła się tylko wartość 1, to wnioskujemy, że omawiana formuła jest tautologią.

Rozwiązanie 2. Często łatwiej jest posłużyć się metodą uproszczoną:
Metoda "nie wprost" – sprawdzamy, czy zdanie może być fałszywe.

1. Ponieważ głównym spójnikiem logicznym naszej formuły jest implikacja, to wiemy, że wartość 0 pojawi się jedynie, gdy $s = [(p \Rightarrow q) \wedge \sim q]$ przyjmie wartość 1 i jednocześnie $\sim p$ przyjmie wartość 0, czyli $w(p) = 1$.

2. Dalej, s jako koniunkcja jest prawdziwe pod warunkiem, że zdania $p \Rightarrow q$ i $\sim q$ są prawdziwe, czyli $w(p \Rightarrow q) = 1$ i $w(q) = 0$.

3. Z drugiej strony, skoro p jest prawdziwe, a q fałszywe, to nie może być prawdziwe $p \Rightarrow q$.

Zachodzi zatem sprzeczność między warunkami, więc nie istnieją wartości logiczne zdań p i q, dla których $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ byłoby fałszywe. Stąd rozpatrywana formuła jest tautologią.

Podstawowe prawa rachunku zdań

1. $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$ prawo idempotentności koniunkcji
2. $(p \vee p) \Leftrightarrow p$ prawo idempotentności alternatywy
3. $\sim (\sim p) \Leftrightarrow p$ prawo podwójnej negacji
4. $p \vee (\sim p)$ prawo wyłączonego środka
5. $\sim (p \wedge (\sim p))$ prawo sprzeczności
6. $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$ prawa de Morgana
   $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$
7. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\sim q) \Rightarrow (\sim p))$ prawo kontrapozycji
8. $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge (\sim q))$ prawo negacji implikacji
9. $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ prawa przemienności
   $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
10. $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$ prawa łączności
    $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$
11. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy
12. $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ prawo rozdzielności alternatywy względem koniunkcji
13. $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ prawo przechodniości implikacji
14. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$ prawo eliminacji równoważności

Powyższe prawa są wykorzystywane przy dowodzeniu twierdzeń.

Funkcje zdaniowe i kwantyfikatory

Niech X będzie zbiorem niepustym (o zbiorach będzie mowa na następnym wykładzie; na razie zadowolimy się intuicyjnym rozumieniem pojęć zbioru, elementu zbioru, należenia do zbioru).

Def. ***Funkcja zdaniowa (forma zdaniowa) jednej zmiennej****,*
to wyrażenie $\phi(x), x \in X \neq \emptyset$, które staje się zdaniem (prawdziwym lub fałszywym), gdy za zmienną x wstawimy element zbioru X. Zbiór X nazywamy ***zakresem zmienności*** *funkcji ϕ. Mówimy, że element $x_0 \in X$* ***spełnia funkcję zdaniową*** *$\phi(x)$, jeśli $\phi(x_0)$ jest zdaniem prawdziwym.*

Zbiór elementów spełniających funkcję zdaniową ϕ oznaczamy następująco:
$\{x \in X : \phi(x)\} = \{x \in X : \phi(x)$ jest zdaniem prawdziwym $\}$.

Przykład 9.

1. Wyrażenie $x > 7$ nie jest funkcją zdaniową, bo nie wiadomo do jakiego zbioru należą obiekty x. Jeśli nie są to liczby rzeczywiste, a np. zbiory, proste na płaszczyźnie, to wyrażenie nie ma sensu.
2. Wyrażenie $X = \mathbb{R},\ x - 7$ nie jest funkcją zdaniową, bo po wstawieniu za x liczby rzeczywistej nie dostaniemy zdania, a liczbę.
3. Wyrażenie $X = \mathbb{R},\ x < 7$ jest funkcją zdaniową. Po wstawieniu za x liczby rzeczywistej dostaniemy zdanie, np. dla $x = \pi$ będzie to zdanie prawdziwe.

Przykład 10. Wyznaczyć zbiór elementów spełniajacych funkcję zdaniową.

1. $X = \mathbb{R},\ \phi(x):\ x < 7$
   $\{x \in \mathbb{R}:\ \phi(x)\} = (-\infty, 7)$ – przedział
2. $X = \mathbb{R},\ \phi(x):\ x < 7 \wedge x^2 \geqslant 100$
   $\{x \in \mathbb{R}:\ \phi(x)\} = (-\infty, -10]$ – przedział
3. $X = \mathbb{N},\ \phi(x):\ x > 3 \Rightarrow x = 7$
   $\{x \in \mathbb{N}:\ \phi(x)\} = \{1, 2, 3, 7\}$ – tylko dla tych liczb prawdziwa jest implikacja:
   dla $x \in \{1, 2, 3\}$ fałszywy poprzednik, a dla $x = 7$ prawdziwy następnik.
4. $X = \mathbb{R},\ \phi(x):\ x > 7 \Leftrightarrow x < 5$
   $\{x \in \mathbb{R}:\ \phi(x)\} = [5, 7]$ – tylko dla liczb z tego przedziału prawdziwa jest równoważność: obie strony równoważności są wtedy fałszywe; nie jest możliwe, by obie strony równoważności były prawdziwe.

Kwantyfikatory

Niech $\phi(x)$ będzie funkcją zdaniową zmiennej $x \in X \neq \emptyset$. Wyróżniamy dwa kwantyfikatory.

Def. ***Kwantyfikator ogólny (uniwersalny)****, czyli "dla każdego"*
jest oznaczany symbolem $\forall$ *lub* $\bigwedge$.
Zdanie logiczne z użyciem kwantyfikatora ogólnego ma postać

$$\forall x \in X\ \phi(x)$$

i czytamy je "dla każdego elementu x *ze zbioru* X *zachodzi* $\phi(x)$*".*

Uwaga: Zdanie $\forall x \in X\ \phi(x)$ jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\{x \in X : \phi(x)\} = X.$$

Def. ***Kwantyfikator szczegółowy (egzystencjalny)****, czyli "istnieje" jest oznaczany symbolem $\exists$ lub $\bigvee$.*
Zdanie logiczne z użyciem kwantyfikatora szczegółowego ma postać

$$\exists x \in X\ \phi(x)$$

i czytamy je "istnieje element x w zbiorze X, dla którego zachodzi $\phi(x)$".

Uwaga: Zdanie $\exists x \in X\ \phi(x)$ jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\{x \in X : \phi(x)\} \neq \emptyset.$$

Uwaga: Kwantyfikator $\forall(\bigwedge)$ jest uogólnieniem spójnika koniunkcji, zaś kwantyfikator $\exists(\bigvee)$ jest uogólnieniem alternatywy.

Przykład 11. Określić wartość logiczną zdań.

1. $\forall x \in \mathbb{R}\ x^2 < 7$ – fałsz: nie jest prawdą, że każda liczba rzeczywista x spełnia warunek $x^2 < 7$.
2. $\exists x \in \mathbb{R}\ x^2 < 7$ – prawda: istnieje liczba spełniająca podany warunek np. $x = 0$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}\ (x < 0 \ \Rightarrow\ x > 0)$ – fałsz: np. dla $x = -1$ implikacja jest fałszywa.
4. $\exists x \in \mathbb{R}\ (x < 0 \ \Rightarrow\ x > 0)$ – prawda: np. dla $x = 1$ implikacja jest prawdziwa.
5. $\forall x \in \mathbb{R}\ (x^2 < 0 \ \Rightarrow\ x > 7)$ – prawda: dla wszystkich x rzeczywistych poprzednik implikacji jest fałszywy,a to wystarczy, by implikacja była prawdziwa.
6. $\exists x \in \mathbb{R}\ (x < 0 \ \Leftrightarrow\ x > 7)$ – prawda: np. dla $x = 1$ obie strony równoważności są fałszywe, więc wtedy równoważność jest prawdziwa.

Zakresem kwantyfikatora nazywamy zakres zmiennej funkcji zdaniowej, której on dotyczy.
W przypadku, gdy zakres zmienności kwantyfikatora jest wcześniej określony,
zamiast $\exists x \in X\ \varphi(x)$ można pisać $\exists x\ \varphi(x)$, zamiast $\forall x \in X\ \varphi(x)$ można pisać $\forall x\ \varphi(x)$.

Oprócz funkcji zdaniowych jednej zmiennej wykorzystuje się też funkcje zdaniowe wielu zmiennych.

Na przykład funkcja zdaniowa dwóch zmiennych to wyrażenie $\psi(x,y)$, $x \in X, y \in Y$, które staje się zdaniem, gdy za x i y wstawimy elementy odpowiednich zbiorów.

Przykład 12.

1. Wyrażenie $x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{Z},\ \ x + y = \pi$ jest funkcją zdaniową dwóch zmiennych.
2. Wyrażenie $\exists y \in \mathbb{Z}\ x + y = \pi$ jest funkcją zdaniową zmiennej x.
3. Wyrażenie $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{Z}\ x + y = \pi$ jest zdaniem fałszywym: dla $x = 0$ nie istnieje liczba całkowita y spełniającą podaną równość.
4. Wyrażenie $\forall y \in \mathbb{Z}\ \exists x \in \mathbb{R}\ x + y = \pi$ jest zdaniem prawdziwym: dla każdej całkowitej liczby y można dobrać takie $x \in \mathbb{R}$, aby równość była spełniona (dla każdego y inny x).
5. Wyrażenie $\exists y \in \mathbb{Z}\ \forall x \in \mathbb{R}\ x + y = \pi$ jest zdaniem fałszywym: nie istnieje jeden wspólny y "pasujący" do wszystkich x w podanej równości.

Mówimy, że kwantyfikatory $(\forall x \in X)$ i $(\exists x \in X)$ **wiążą** zmienną x. Zmienną x w wyrażeniu nazywamy **związaną**, jeśli wiąże ją jakiś kwantyfikator. Zmienną która nie jest związana, nazywamy **zmienną wolną**.

Często zdarza się, że wybieramy zmienne z pewnego podzbioru zakresu kwantyfikatora. W takiej sytuacji wygodnie jest korzystać z **kwantyfikatorów ograniczonych** (zrelatywizowanych).

Def. *Niech $\phi(x)$ - funkcja zdaniowa zmiennej $x \in X$ i $A \subseteq X$. Kwantyfikatory ograniczone do zbioru A definiujemy następująco:*

- $(\forall x \in A)\phi(x) \Leftrightarrow \forall x \in X(x \in A \Rightarrow \phi(x))$
- $(\exists x \in A)\phi(x) \Leftrightarrow \exists x \in X(x \in A \wedge \phi(x))$.

Przykład 13. Wyznaczyć zbiór elementów $x \in \mathbb{R}$ spełniających podaną funkcję zdaniową $\phi(x)$.

1. $\phi(x):\ \forall y \in \mathbb{R}\ x > \sin y$
   Szukamy takich $x \in \mathbb{R}$, które są liczbami większymi od wszystkich możliwych wartości $\sin y$. Wystarczy, że będą to liczby większe od największej wartości $\sin y$, czyli od 1.
   $\{x \in \mathbb{R}:\ \forall y \in \mathbb{R}\ x > \sin y\} = (1, +\infty)$.
2. $\phi(x):\ \exists y \in \mathbb{R}\ x > \sin y$
   Szukamy takich $x \in \mathbb{R}$, które są liczbami większymi od jakiejś wartości $\sin y$. Wystarczy,

że będą to liczby większe od najmniejszej wartości $\sin y$, czyli większe od -1.

$\{x \in \mathbb{R} : \ \exists y \in \mathbb{R} \ x > \sin y\} = (-1, +\infty)$.

Prawa rachunku kwantyfikatorów

Def. *Wyrażenie (zapisane z użyciem kwantyfikatorów) nazywamy* ***prawem rachunku kwantyfikatorów****, gdy jest prawdziwe dla dowolnej interpretacji występujących w nim symboli i funkcji zdaniowych.*

Tw. *Niech $\phi(x), \psi(x)$ – funkcje zdaniowe o zakresie zmiennej $x \in X \neq \emptyset$. Wtedy:*

1. $\forall x \phi(x) \Rightarrow \exists x \phi(x)$,
2. $\neg(\forall x)\phi(x) \Leftrightarrow \exists x(\neg\phi(x))$
$\neg(\exists x)\phi(x) \Leftrightarrow \forall x(\neg\phi(x))$ *prawa de Morgana*
3. $\forall x(\phi(x) \wedge \psi(x)) \Leftrightarrow \ \forall x\phi(x) \wedge \forall x\psi(x)$
rozdzielność kwantyfikatora ogólnego względem koniunkcji
4. $\exists x(\phi(x) \vee \psi(x)) \Leftrightarrow \ \exists x\phi(x) \vee \exists x\psi(x)$
rozdzielność kwantyfikatora szczegółowego względem alternatywy
5. $\exists x(\phi(x) \wedge \psi(x)) \ \Rightarrow \ \exists x\phi(x) \wedge \exists x\psi(x)$
6. $\forall x\phi(x) \vee \forall x\psi(x) \ \Rightarrow \ \forall x(\phi(x) \vee \psi(x))$.

Uwaga: Dla kwantyfikatorów ograniczonych zachodzą te same prawa.

Komentarz do własności 5. i 6.

Musi zachodzić implikacja $\Rightarrow$, ale nie koniecznie w drugą stronę, czyli $\Leftarrow$.

- Na przykład dla $X = \mathbb{R}$, $\phi(x): \ x > 0$, $\ \psi(x): \ x < 0$ dostajemy
prawdziwe zdanie: $\exists x \in \mathbb{R}(x > 0 \wedge x < 0) \ \Rightarrow \ [(\exists x \in \mathbb{R} \ x > 0) \wedge (\exists x \in \mathbb{R} \ x < 0)]$,
a fałszywe $[(\exists x \in \mathbb{R} \ x > 0) \wedge (\exists x \in \mathbb{R} \ x < 0)] \ \Rightarrow \ \exists x \in \mathbb{R}(x > 0 \wedge x < 0)$.

- Dla $X = \mathbb{R}$, $\phi(x): \ x > 0$, $\ \psi(x): \ x < 1$ dostajemy
prawdziwe zdanie: $[(\forall x \in \mathbb{R} \ x > 0) \vee (\forall x \in \mathbb{R} \ x < 1)] \ \Rightarrow \ \forall x \in \mathbb{R}(x > 0 \vee x < 1)$,
a fałszywe $\forall x \in \mathbb{R}(x > 0 \vee x < 1) \ \Rightarrow \ [(\forall x \in \mathbb{R} \ x > 0) \vee (\forall x \in \mathbb{R} \ x < 1)]$.

Prawa włączania i wyłączania kwantyfikatorów

Tw. *Niech* $\phi(x)$ *– funkcja zdaniowa o zakresie zmiennej* $x \in X \neq \emptyset$, β *– zdanie,*
$\diamond$ *niech oznacza wybrany spójnik logiczny* $\wedge, \vee, \Rightarrow$. *Wtedy:*

1. $\forall x(\beta \diamond \phi(x)) \Leftrightarrow \beta \diamond \forall x \phi(x)$
   oraz $\forall x(\phi(x) \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\exists x \phi(x) \Rightarrow \beta)$

2. $\exists x(\beta \diamond \phi(x)) \Leftrightarrow \beta \diamond \exists x \phi(x)$
   oraz $\exists x(\phi(x) \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\forall x \phi(x) \Rightarrow \beta)$

Prawa przestawiania kwantyfikatorów

Tw. *Niech* $\phi(x,y)$ *będzie funkcją zdaniową o zakresie zmiennych* $x \in X, y \in Y$. *Wtedy:*

1. $\forall x \forall y\ \phi(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall x\ \phi(x,y)$ *– przemienność kwantyfikatorów ogólnych*

2. $\exists x \exists y\ \phi(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x\ \phi(x,y)$ *– przemienność kwantyfikatorów szczegółowych*

3. $\exists x \forall y\ \phi(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x\ \phi(x,y)$.

Komentarz do własności 3.
Zdania $\exists x \forall y\ \phi(x,y)$ i $\forall y\ \exists x \phi(x,y)$ nie muszą być równoważne.
Na przyklad zdanie $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ x + y = \pi$ jest fałszywe,
a zdanie $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}\ x + y = \pi$ jest prawdziwe.

Zasada indukcji matematycznej

Tw. *Niech* $\phi(n)$ *– funkcja zdaniowa zmiennej* $n \in \mathbb{N}$. *Jeżeli istnieje liczba* $n_0 \in \mathbb{N}$ *taka, że*

Z1: $\phi(n_0)$ *jest zdaniem prawdziwym,*

Z2: *dla każdego* $k \geqslant n_0$ *prawdziwa jest implikacja* $\phi(k) \Rightarrow \phi(k+1)$,

to $\phi(n)$ *jest zdaniem prawdziwym dla każdej liczby naturalnej* $n \geqslant n_0$.

Zasada indukcji matematycznej jest często wykorzystywana do dowodzenia twierdzeń opisujących własności liczb naturalnych. Zwykle $\phi(n)$ oznacza pewną własność (regułę, wzór) dotyczącą liczb naturalnych.

Dowód z wykorzystaniem zasady indukcji matematycznej przebiega w dwóch krokach (sprawdzamy dwa założenia).

1^0 Szukamy jak najmniejszej liczby naturalnej n_0, która spełnia daną własność.

2^0 Wykazujemy, że przy założeniu, że własność zachodzi dla pewnej liczby k, będzie ona również zachodziła dla liczby $k+1$.

Po sprawdzeniu obu warunków otrzymujemy, korzystając z tezy twierdzenia, że własność będzie spełniona przez kolejne liczby naturalne począwszy od wskazanego n_0.

Przykład 14. Wykorzystując zasadę indukcji matematycznej, wykazać, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dowód:

Niech $\phi(n): \ 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, weźmy $n_0 = 1$.

1^0 Sprawdzamy prawdziwość $\phi(1)$.

Mamy zdanie $\phi(1): \ 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ – prawdziwe.

2^0 Ustalmy $k \geqslant 1$. Załóżmy, że $\phi(k): \ 1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ jest prawdziwe.

Pokażemy, że $\phi(k+1): \ 1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$

również jest prawdziwe.

Przekształcając lewą stronę L równości w $\phi(k+1)$ otrzymamy kolejno

$L = 1 + 2 + \ldots + k + (k+1) =$ wykorzystujemy $\phi(k)$

$= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = P,$

gdzie P jest prawą stroną równości w $\phi(k+1)$.

Zatem na mocy zasady indukcji matematycznej $\phi(n)$ jest prawdziwe dla każdego $n \geqslant 1$.