Sztuka i Techniki Negocjacji 13

prof. dr hab. inż. Andrzej P. Wierzbicki

15 października 2003

Wykład 13. Techniki głosowania i wspomagania decyzji grupowych

Zarówno w zagadnieniach sprawiedliwego podziału, jak i w innych przypadkach decyzji grupowych, można stosować dodatkowo bądź to techniki głosowania, bądź ocen wielokryterialnych, które omówimy kolejno i bardzo skrótowo w tym i w następnym punkcie. Znów trzeba ostrzec, że zagadnieniom tym poświęcono już liczne książki; w tym punkcie przedstawimy wprawdzie krótko, ale dość szczegółowo problematykę technik głosowania, ze względu na jej podstawowe znaczenie dla wielu zagadnień negocjacji i decyzji grupowych.

13.1. Techniki głosowania

Głosowanie można uznać za sposób *wyboru grupowego,* przy następujących założeniach: mamy do czynienia z decyzją grupową (która to decyzja ze swej natury jest jedna dla całej grupy, trzeba ją tylko uzgodnić), a oceny sytuacji są w gruncie rzeczy jednokryterialne, jednoprzedmiotowe, przy czym każdy z uczestników głosowania (głosujący, będziemy go też nazywać decydentem) może uporządkować opcje decyzyjne w skali od najlepszej do najgorszej.

Takie uporządkowanie nazywamy *profilem preferencji* i-tego decydenta. Na przykład, przy opcjach – wariantach – oznaczonych przez A, B, ..., L, M, decydent i-ty może mieć profil preferencji (jeśli uważa wariant D za najlepszy, zaś C za najgorszy):

$$\mathcal{P}_i = \{D \succ K \succ A \succ B \ldots \succ L \succ M \succ C\}. \tag{1}$$

Taki zapis profilu preferencji $\succ$ (przechodniej i zupełnej) nazywamy *profilem Condorceta.*[1] Profile Condorceta wszystkich głosujących niosą w sobie wiele informacji,

[1] Od markiza de Condorcet, który w trakcie rewolucji francuskiej intensywnie analizował techniki głosowania jako podstawę działania systemu demokratycznego. Każdy przełom demokratyczny – także w Polsce w roku 1989 – wywołuje zwiększenie zainteresowania technikami i paradoksami głosowania, przy czym rozmaite zgromadzenia poświęcają wiele godzin debat proceduralnych na dyskusje tych technik (nie zawsze zdając sobie sprawę, jak wiele już analizy teoretycznej i literatury fachowej poświęcono tym zagadnieniom).

a każda próba ich agregacji poprzez zastosowanie określonej techniki głosowania może doprowadzić do rozmaitych paradoksów. Rozpatrzmy najpierw następujący przykład. Załóżmy, że dla trzech wariantów A, B, C oraz 21 głosujących mamy następujące profile preferencji:

- 7 głosujących: $A \succ C \succ B$;
- 7 głosujących: $B \succ C \succ A$;
- 6 głosujących: $C \succ B \succ A$;
- 1 głosujący: $A \succ B \succ C$.

Zastosujmy najprostszą (i powszechnie stosowaną) technikę *jednokrotnego głosowania prostego:* każdy z głosujących ma jeden głos, który powinien oddać na jeden z wariantów uważany przez niego za najlepszy, a wygrywa wariant mający największą liczbę głosów. W przykładzie powyższym wygra wtedy wariant A, który uzyskuje 8 głosów. Jeśli jednak przyjrzymy się dokładniej powyższym profilom preferencji, to zauważymy, że wariant A wygrał by też w głosowaniu na wariant najgorszy, i to uzyskując absolutną większość 13 głosów. Zatem *głosowanie jednokrotne proste może dać w efekcie wybór wariantu uważanego za najgorszy przez większość głosujących;* wynik ten zwany jest *paradoksem Bordy.*[2]

Zauważmy, że w powyższym przykładzie nie jest prosty wybór rozsądnego wariantu. Jeśli bowiem zastosujemy *wielokrotne głosowanie proste* – czyli powtarzać będziemy głosowania, eliminując za każdym powtórzeniem wariant, który uzyskał najmniej głosów – to po pierwszym głosowaniu, z wynikami A – 8 głosów, B – 7 głosów, C – 6 głosów, wyeliminujemy wariant C. Ale w drugim głosowaniu wariant B otrzyma 13 głosów, zaś A nadal tylko 8 głosów, a więc B będzie wybrany. Nie oznacza to, że jest to wariant najlepszy: jeśli zastosujemy *wielokrotne głosowanie akceptacyjne* – czyli powtarzać będziemy głosowania, ale głosując nad tym, który wariant należy usunąć jako najgorszy – to po pierwszym głosowaniu usuniemy wariant A, który ma wtedy 13 głosów "ujemnych", natomiast w drugim głosowaniu wariant to właśnie wariant B uzyska 13 głosów "ujemnych" i zwycięży wariant C – tylko 8 głosów "ujemnych" w drugim głosowaniu.

Dla rozwiązania paradoksu sygnalizowanego przez powyższy przykład, Borda zaproponował stosunkowo prostą technikę zliczania punktów w głosowaniu jednokrotnym, ale z pełnym uszeregowaniem wariantów. Przy m wariantach podlegających głosowaniu, wariant pierwszy w profilu preferencji danego głosującego uzyskuje $m-1$ punktów, wariant drugi – $m-2$ punktów itd., wariant przedostatni – 1 punkt,

[2]Od artylerzysty i inżyniera Borda z czasów jeszcze sprzed rewolucji francuskiej, który zagadnienia technik głosowania badał wcześniej (w roku 1770), niż Condorcet, ale stosował podejście pragmatyczne. Condorcet natomiast stosował (od roku 1785) podejście aksjomatyczne i stał się prekursorem teorii głosowania i wyboru grupowego. Tym niemniej, do dziś obserwuje się w tej teorii główne kontrowersje według tej linii podziału, zarysowanej już przez Bordę i Condorceta: czystość aksjomatyczna nadal prowadzi do paradoksów, natomiast podejścia pragmatyczne, choć bardziej skuteczne, uważane są za mniej eleganckie.

wariant ostatni – 0 punktów. Zastosowanie tej *techniki Bordy* daje w omawianym wyżej przykładowym paradoksie wynik 16 punktów dla A, 21 punktów dla B oraz 26 punktów dla C – czyli wariantem zwycięskim jest C, podobnie jak w wielokrotnym głosowaniu akceptacyjnym. W celu formalizacji techniki Bordy w terminach współczesnych i wykorzystania obliczeń komputerowych, trzeba w niej sumować t.zw. *wektory preferencji Bordy*, które na pozycji odpowiadającej danemu wariantowi podają przypadające mu punkty Bordy. Np. dla przytoczonego wcześniej w równaniu (1) przykładu profilu Condorceta, odpowiadający mu wektor Bordy ma postać:

$$\mathbf{b}_i = (m-3,\, m-4,\, 0,\, m-1,\, \ldots\, m-2,\, 2,\, 1). \tag{2}$$

Rozpatrzmy jeszcze jeden przykład dotyczący także 3 wariantów do wyboru i 21 głosujących, ale z następującymi profilami preferencji:

- 12 głosujących: $A \succ B \succ C$;
- 4 głosujących: $C \succ B \succ A$;
- 5 głosujących: $B \succ C \succ A$,

Przy zastosowaniu techniki Bordy największą liczbę punktów – 26 – uzyskuje wariant B; wariant C zbiera tylko 13 punktów, natomiast wariant A, *który za najlepszy uważa większość czyli 12 głosujących,* uzyskuje tylko 24 punkty Bordy, gdyż 9 głosujących uważa go za wariant najgorszy. Wariant B wygrywa w technice Bordy dlatego, że *jest to wariant średnio najlepszy:* wszyscy ci głosujący, którzy uważali wariant A lub wariant C za najlepszy, uznali wariant B za drugi z kolei. W technice Bordy wygrywa więc wariant "najmniejszego zła". Ale czy mamy prawo dopuścić, aby w demokratycznym głosowaniu wygrywał wariant "najmniejszego zła" B, gdy istnieje inny wariant A uznany za najlepszy przez większość głosujących?

Takie właśnie pytanie postawił Condorcet, który po Bordzie sformułował następujące aksjomaty wyboru grupowego, charakteryzujące (jego zdaniem) rozsądne procedury wyboru grupowego czy głosowania:

- **(C1)** Wariant, który w porównaniach parami z innymi wariantami uzyskuje zawsze większość głosów, czyli tak zwany *wariant zwycięski w sensie Condorceta*, powinien zostać uznany za najlepszy, czyli wybrany;

- **(C2)** Wariant, który w porównaniach parami z innymi wariantami uzyskuje zawsze mniejszość głosów, czyli t.zw. *wariant przegrywający w sensie Condorceta*, nie powinien zostać wybrany.

Technika prostego głosowania jednokrotnego spełnia aksjomat C1, ale – jak wynika z pierwszego z powyższych przykładów – nie spełnia aksjomatu C2. Technika Bordy spełnia aksjomat C2, ale – jak wynika z drugiego z tych przykładów – nie spełnia aksjomatu C1. Jaką więc trzeba zaproponować technikę głosowania, aby spełniała oba ona aksjomaty Condorceta?

W odpowiedzi na to pytanie, Condorcet zaproponował zliczanie wszystkich przypadków, w których z profilu preferencji poszczególnych głosujących wynika preferencja jednego wariantu nad innym. Tak więc dla pierwszego przykładu 21 profili preferencji głosujących mamy:

- 8 przypadków, gdy $A \succ B$ oraz 13 przypadków, gdy $B \succ A$;
- też 8 przypadków, gdy $A \succ C$ oraz 13 przypadków, gdy $C \succ A$;
- wreszcie także 8 przypadków, gdy $B \succ C$ oraz 13 przypadków, gdy $C \succ B$.

czyli wariant C jest zwycięskim, natomiast wariant A – przegrywającym w sensie Condorceta.

W *technice Condorceta* zlicza się te wszystkie porównania parami, a następnie zaczyna się eliminację, niejako jak w wileokrotnym głosowaniu akceptacyjnym (tyle, że nie jest tu konieczne powtarzanie głosowań, gdyż zakłada się, że głosujący podali pełne profile preferencji). Najpierw usuwa się ten wariant, który miał najmniejszą liczbę zwycięstw w porównaniach parami – w tym przykładzie wariant A, który miał łącznie tylko 16 zwycięstw. Przy większej, niż trzy, liczbie wariantów usuwa się dalej kolejno najgorsze warianty. Z pozostałych wariantów B i C lepszy jest C, gdyż ma większą liczbę zwycięstw w porównaniach parami. W pierwszym z rozpatrywanych przykładów technika Condorceta daje więc taki sam rezultat, jak technika Bordy.

Jednak w drugim z rozpatrywanych przykładów wynik jest odmienny. Zliczanie porównań parami daje w tym przypadku następujące wyniki:

- 12 przypadków, gdy $A \succ B$ oraz 9 przypadków, gdy $B \succ A$;
- też 12 przypadków, gdy $A \succ C$ oraz 9 przypadków, gdy $C \succ A$;
- wreszcie 17 przypadków, gdy $B \succ C$ oraz 4 przypadki, gdy $C \succ B$.

a więc wariant A jest zwycięskim (łatwo wykazać, że wariant mający większość w głosowaniu prostym musi być zwycięskim w sensie Condorceta), natomiast wariant C – przegrywającym w sensie Condorceta. Stosując technikę Condorceta eliminujemy najpierw wariant C, który ma najmniejszą liczbę – tylko 13 – zwycięskich porównań parami. Z pozostałych dwóch wariantów A i B lepszy jest wariant A, gdyż ma większą liczbę zwycięskich porównań parami. Można udowodnić, że technika Condorceta zawsze da w wyniku wariant zwycięski w sensie Condorceta, jeśli taki wariant istnieje; z jej konstrukcji opartej na eliminacji wariantów najgorszych łatwo wywnioskować, że technika ta nigdy nie da w wyniku wariantu przegrywającego w sensie Condorceta.

Technika Condorceta jest jednak dość złożona – zarówno w sensie mechanizmu głosowania (trzeba określić całe profile preferencji, ale to samo niezbędne jest w technice Bordy), jak i w sensie niezbędnych obliczeń wyników. Można w niej zastosować obliczenia komputerowe, ale trzeba ją sformalizować w terminach współczesnych, np. w formie macierzowej. Jeśli zamiast liter przyporządkujemy poszczególnym wariantom liczby naturalne $j = 1, \ldots m$, to możemy profil preferencji i-tego decydenta wyrazić w postaci macierzy $m \times m$, którą oznaczymy $\mathbf{P}_i$, z elementami $p_{i,jk} = (0 \vee 1)$, przy czym $p_{i,jk} = 1$ oznacza, że decydent i ściśle preferuje wariant j w porównaniu z wariantem k, natomiast $p_{i,jk} = 0$ oznacza przypadek przeciwny. Wynika stąd np., że $p_{i,jj} = 0$ oraz $p_{i,kj} = 1 - p_{i,jk}$ dla $k \neq j$; ale nawet przy spełnieniu tych wymagań, macierz zero-jedynkowa może nie reprezentować przechodniego profilu (gdyż może zawierać cykle preferencji) i konieczne jest tego sprawdzanie, np. za pomocą określenia grafu preferencji odpowiadającego danej macierzy.

Dla zastosowania techniki Condorceta trzeba zsumować macierze $\mathbf{P}_i$ dla wszystkich i, gdyż wtedy uzyskamy potrzebne w tej technice dane, ile razy dany wariant j był preferowany w stosunku do wariantu k – lub odwrotnie, po przeciwległej stronie przekątnej macierzy. Dla pierwszego z rozpatrywanych przykładów odpowiednia suma macierzy $\mathbf{P}_i$ ma postać:

	A	B	C
A	–	8	8
B	13	–	8
C	13	13	–

natomiast dla przykładu drugiego:

	A	B	C
A	–	12	12
B	9	–	17
C	9	4	–

Dla zastosowania techniki Condorceta wystarcza więc sumować wiersze sum macierzy $\mathbf{P}_i$ oraz eliminować kolejno wiersze o najmniejszej sumie (i odpowiednie kolumny): w pierwszym z tych przykładów najpierw eliminujemy wariant A, w drugim – wariant C. Zauważmy, że w drugim z omawianych przykładów wariant B (który był wariantem zwycięskim w sensie Bordy, ale nie w sensie Condorceta) ma na początku procedury największą sumę wygranych porównań parami, ale po usunięciu wiersza (i kolumny) C staje się jednak gorszy od wariantu A. Na tym właśnie polega sens eliminacji wierszy i kolumn; bez takiej eliminacji, sumowanie wierszy sum macierzy $\mathbf{P}_i$ odpowiadałoby dokładnie technice Bordy.

Technika głosowania Condorceta może nie dać w wyniku wariantu zwycięskiego w sensie Condorceta, gdyż taki wariant może nie istnieć. Związane jest to z podstawowym paradoksem: *agregacja przechodnich profili preferencji polegająca na sumowaniu głosów z porównań parami może nie prowadzić do przechodniej preferencji zagregowanej.* Przypomnijmy tu znany przykład: mamy trzy warianty A, B, C i trzech decydentów o profilach $A \succ B \succ C$, $C \succ A \succ B$, $B \succ C \succ A$. Przykład ten podany był faktycznie przez Condorceta i zwany jest *paradoksem Condorceta*:

po agregacji takich profili preferencji, wariant zwycięski w sensie Condorceta nie istnieje, a technika Condorceta (zresztą także żadna inna technika głosowania bez manipulacji) nie daje jednoznacznego rezultatu.

Zarówno technika Bordy, jak jeszcze bardziej technika Condorceta, są skomplikowane w realizacji praktycznej, zwłaszcza bez wspomagania komputerowego. Wyobraźmy sobie komisję wyborczą przy głosowaniu na kandydatów do zarządu dużej organizacji, liczącej np. ponad 1000 członków, przy 10 miejscach w zarządzie i 25 kandydatach, która to komisja zobowiązana byłaby do przeprowadzenia wyborów techniką Bordy lub, co gorzej, Condorceta, zaczynając od analizy ważności głosów czyli ustalenia poprawności profilu podanego przez każdego z członków. Nawet przy wspomaganiu komputerowym, technika Condorceta może być krytykowana za zbyt optymistyczne założenia o psychologicznej odpowiedzialności decydentów, którzy z natury ludzkiej będą się koncentrować na prawidłowym ustaleniu kolejności wariantów dla nich najważniejszych, mniej jednak uwagi poświęcą kolejności wariantów mniej ważnych. Założenie o możliwości pełnego porównania parami dużego zbioru wariantów, często przyjmowane w teorii decyzji, nie jest w tym sensie realistyczne.

Wady tej unika pewne uogólnienie techniki Condorceta polegające na zastosowaniu w głosowania akceptującego wielokrotnego, gdy za każdym głosowaniem głosujemy nad wariantem najgorszym i usuwamy go z listy. Jest to uogólnienie, gdyż głosujący mogą w tym przypadku zmieniać profile preferencji w zależności od kontekstu, czyli pozostałych kandydatów; unikamy zaś wady, gdyż w pierwszych głosowaniach uczestnicy mogą się skoncentrować na eliminacji najgorszych, potem zaś – na wyborze najlepszych. Jednakże, w podanym wyżej przykładzie 10 miejsc i 25 kandydatów trzeba mimo wszystko przeprowadzić 15 głosowań.

Technika głosowania Bordy może być też w różny sposób uogólniana – np. *technika jury* polega na przyznawaniu wszystkim wariantom ocen z odpowiedniego przedziału (w odróżnieniu od techniki Bordy, mogą to być oceny jednakowe dla kilku wariantów). *Technika Nansona* polega na stosowaniu techniki Bordy wielokrotnie, z odrzucaniem wariantów uzyskujących nie więcej, niż średnia ocena Bordy ($\frac{m-1}{2} \times n$, gdzie m – liczba wariantów, n – liczba głosujących), a następnie obliczaniu nowych ocen Bordy; technika ta gwarantuje wybór wariantu zwycięskiego w sensie Condorceta, jeśli taki istnieje.

Jednakże większość autorów prac w zakresie teorii głosowania zajmowało się modyfikacjami techniki Condorceta, ze względu na jej elegancję teoretyczną. Dodgson (m.in. autor *Alicji w krainie czarów*) zajmował się też matematyczną teorią głosowania. Rozpatrywał pojęcie najmniejszej liczby $t(\mathcal{P}, \mathcal{M})$ koniecznych zmian porównań parami profili preferencji $\mathcal{P}$ (łącznie dla wszystkich decydentów) dla danego zbioru wariantów $\mathcal{M}$ takiej, aby dany wariant stał się wariantem zwycięskim w sensie Condorceta. Zbiór takich wariantów, które są zwycięskie bez modyfikacji (przy $t(\mathcal{P}, \mathcal{M}) = 0$) nazwał *jądrem*. Jeśli jądro jest niepuste, to wybiera się jego element; jeśli jest puste, to wybiera się wariant o najmniejszym $t(\mathcal{P}, \mathcal{M})$. Choć też bardzo elegancka, *technika Dodgsona* ma znaczenie raczej teoretyczne. *Technika Blacka* polega na innej modyfikacji – wyborze wariantu zwycięskiego w sensie Condorceta, jeśli istnieje, a w jego braku – zastosowaniu techniki Bordy.

Istnieje w sumie chyba kilkadziesiąt różnych technik głosowania. Wyliczymy tu jeszcze kilka istotnych ich przykładów. *Procedura poprawek* (jej nazwa pochodzi od sposobu głosowania poprawek ustaw w Kongresie Stanów Zjednoczonych) polega na określeniu porządku porównania wariantów, a następnie głosowaniu parami nad ich porównaniem, z usuwaniem wariantów przegrywających w tych porównaniach. *Technika Copelanda* polega na przypisywaniu każdemu wariantowi po jednym punkcie za każdą wygraną porównania parami z innym wariantem; wygrywa wariant o największej sumie takich punktów. *Technika maksyminu* polega na obliczeniu dla każdego wariantu jego najmniejszej ilości głosów w porównaniach parami z innymi wariantami, a następnie wybór wariantu o największej z tych najmniejszych ilości głosów. *Technika akceptacji* polega na pozwoleniu głosowania na dowolną ilość wariantów; każdemu z nich można przypisać 0 lub 1 punkt. Najczęściej stosowana praktycznie jest wspomniana na wstępie *technika głosowania prostego jednokrotnego;* jeśli nie da ona w wyniku wariantu wybranego absolutną większością głosów, można stosować *technikę głosowania prostego dwukrotnego,* z pozostawieniem do drugiej tury głosowania tylko dwóch wariantów o największej liczbie głosów, lub *technikę głosowania prostego wielokrotnego,* ze stopniowym usuwaniem wariantów uzyskujących najmniejszą liczbę głosów. Podobna do głosowania prostego wielokrotnego jest *technika Hare,* wymagająca jednak podania pełnych profili preferencji przez głosujących. Jeśli któryś z wariantów ma większość absolutną, to jest wybierany; jeśli nie, eliminuje się wariant uważany za najlepszy przez najmniejszą liczbę głosujących, i analizuje się ponownie profile preferencji dla pozostałych wariantów (w pierwszym z rozważanych tu przykładów o 21 głosujących eliminacji ulega akurat wariant C – zwycięski zarówno w sensie Condorceta jak i Bordy).

Przy tak dużej liczbie technik głosowania powstaje oczywiste pytanie, które z tych technik są dobre bądź zalecane do zastosowania w praktyce. Przed próbą odpowiedzi trzeba jednak określić kryteria oceny technik głosowania. Nurmi (1999) wylicza kilkanaście takich kryteriów, z których najważniejsze to:

a. Wybór wariantu zwycięskiego Condorceta;

b. Eliminacja wariantu przegrywającego Condorceta;

c. Wybór wariantu uzyskującego absolutną większość głosów w głosowaniu prostym;

d. Monotoniczność: modyfikacja profili preferencji powodująca wzrost poparcia dla wariantu wygrywającego nie powinna spowodować jego przegranej;

e. Pareto optymalność: jeśli jakiś wariant zostaje wybrany, to nie ma wariantu takiego, który by preferowali w porównaniu parami z wariantem wybranym wszyscy głosujący;

f. Spójność: dla dowolnego podziału zbioru głosujących na podzbiory, jeśli dany wariant jest wybrany przy głosowaniu w każdym podzbiorze, to powinien być też wybrany przy głosowaniu w całym zbiorze.

Nurmi dyskutuje dalej problem, które ze znanych technik głosowania najlepiej spełniają takie kryteria. Gdyby za podstawę wyboru przyjąć liczbę spełnionych kryteriów, najlepszą byłaby technika Blacka; gdyby zaś żądać spełnienia kryterium eliminacji wariantu przegrywającego Condorceta, monotoniczności i spójności (jako wymogów najbardziej naturalnych), to najlepsza byłaby technika Bordy. Widzimy jednak, że nie ma techniki najlepszej, spełniającej wszystkie kryteria – a są to dopiero kryteria teoretyczne. Można bowiem do nich dodać różnorodne kryteria pragmatyczne – względnej prostoty i przejrzystości, łatwości zastosowania, odporności na *zniekształcenia strategiczne* czyli *manipulację indywidualną* (pozorną zmianę preferencji przez jednego decydenta w celu uzyskania pożądanego wyniku) czy na *manipulację agendową* (wybór techniki i ustalenie szczegółów głosowania przez jego organizatora, w tym samym celu).

Trzeba wreszcie podkreślić, że znaczenie poszczególnych kryteriów teoretycznych wiąże się z różnorodnymi paradoksami głosowania, z których jak dotąd wymieniliśmy tylko paradoksy Bordy i Condorceta. Zacytujemy, znów według Nurmiego (1999) kilka paradoksów dalszych.

Paradoks dodatkowego wsparcia polega na tym, że dodatkowe głosy za danym wariantem w mogą zmienić go z wariantu wygrywającego na przegrywający w niektórych technikach głosowania, np. w często stosowanej technice dwukrotnego głosowania prostego.

Paradoks spójności polega na tym, że przy podziale głosujących np. na dwie połowy, proste głosowanie dwukrotne może dać zupełnie inny wynik, niż przy liczeniu wszystkich głosów razem.

Paradoks Arrowa jest jednym z najbardziej znanych i podstawowych paradoksów wyboru grupowego; dotyczy on nie tyle paradoksalnych wyników głosowania w konkretnej sytuacji, co niespójności kilku, jak by się zdawało, całkowicie racjonalnych wymagań co do agregacji grupowej preferencji indywidualnych. K.J. Arrow przyjął trzy aksjomaty racjonalności takiej agregacji grupowej – które przedstawiamy tu tak, jakby dotyczyły przypadku szczególnego, czyli techniki głosowania:

- **A1.** *Równość czyli brak dyktatora:* nie ma takiego uczestnika głosowania, którego profil indywidualny decydował by o wyniku głosowania niezależnie od profili innych uczestników;

- **A2.** *Pareto optymalność* (identycznie z kryterium **f** cytowanym powyżej): w przypadku jednomyślnej oceny najlepszego wariantu, należy go wybrać;

- **A3.** *Niezależność od wariantów nieistotnych:* o wyborze danego wariantu decydują wyłącznie jego porównania z innymi wariantami, nie porównania innych wariantów między sobą.

Z aksjomatów A3 i A2 wynika też aksjomat C1 Condorceta; technika Condorceta spełnia aksjomaty Arrowa, natomiast technika Bordy ich nie spełnia.

Znane *twierdzenie Arrowa* (zob. np. 1983) mówi, że *nie można skonstruować techniki głosowania, która spełniała by te trzy aksjomaty oraz dawała przechodnią i zupełną preferencję zbiorową* (czyli acykliczne uszeregowanie wariantów) dla dowolnych przechodnich i zupełnych profili preferencji indywidualnych, obejmujących porównanie więcej, niż dwóch wariantów.

Różne mogą być interpretacje paradoksu Arrowa – wydaje się jednak, że istotą jego jest zbytnie znaczenie, jakie przywiązuje się do logiki porównań parami, a w konsekwencji do aksjomatu niezależności od wariantów nieistotnych lub do wymagania Condorceta C1. Nie ma bowiem paradoksu w stwierdzeniu – zgodnie z logiką Bordy – że za najlepszy należy wybrać wariant oceniony przez wszystkich w średniej ocen lepiej, niż wariant zwycięski w sensie Concordeta (który jest wprawdzie uważany za najlepszy przez większość, ale w średniej ocen może być gorszy). Trudne jest tylko przyzwyczajenie do takiego rozumowania wyborców, którzy przywykli utożsamiać demokrację z techniką głosowania prostego.

Rozumując w ten sposób, Nurmi (1999) podał nastepującą modyfikację techniki Bordy, która unika większości pułapek wyrażonych przez rozmaite paradoksy głosowania. Każdemu z głosujących przyznaje się 100 punktów, które można interpretować jako procenty poparcia dla poszczególnych wariantów, nad którymi głosuje. Głosujący ma prawo przydzielić te punkty dowolnie dla poszczególnych wariantów – przyznać je wszystkie jednemu, podzielić je równo lub nierówno, itp. Głos jest nieważny, jeśli głosujący przyzna w sumie więcej, niż 100 punktów. Wariantem zwycięskim w technice Nurmiego jest wariant, który uzyska największą sumę punktów Nurmiego (czyli tak, jak w technice Bordy, tyle że punkty Bordy dokładnie odpowiadają miejscu danego wariantu w profilu preferencji, natomiast punkty Nurmiego określają też to miejsce, ale w przybliżeniu).[3]

Technika Nurmiego jest godna zalecenia do zastosowań praktycznych wszędzie tam, gdzie można ją zastosować bez obawy o brak jej zrozumienia – dla większych zbiorów wyborców jeszcze przez wiele lat bardziej przejrzyste będzie głosowanie proste. Bowiem tak jak już wspominaliśmy, jest wiele technik głosowania, ale nie ma techniki uniwersalnie najlepszej – trzeba dobierać technikę głosowania do konkretnego typu zastosowania.

[3]Technika ta jest podobna do omówionej wcześniej procedury Younga, ale technika Nurmiego jest pierwotna: Young dostosował opublikowaną wcześniej technikę Nurmiego do szczególnego przypadku głosowania nad podziałem kosztów.

14.5. Wspomaganie wielokryterialnych decyzji grupowych

Uogólnieniem problematyki technik głosowania jest kwestia grupowej oceny wielokryterialnej dyskretnego zbioru wariantów czy opcji decyzyjnych; wartości poszczególnych kryteriów charakteryzujące poszczególne warianty nazywa się wtedy też atrybutami tych wariantów. Jest to dziedzina o bardzo złożonej problematyce. Jeśli już grupowy wybór jednokryterialny jest problemem o wielu paradoksach racjonalności, to oczywiście przenosi się to na wybór wielokryterialny. Tym niemniej, istnieje wiele technik wyboru wielokryterialnego; często rezygnuje się przy tym ze ściśle aksjomatycznych definicji racjonalności, stosując podejścia bardziej pragmatyczne.

Trzeba jednak na wstępie przestrzec, że grupowe podejścia do problemów wyboru wielokryterialnego mają powodzenie praktyczne tylko wtedy, gdy decydenci w grupie są ekspertami fachowo przygotowanymi do przeprowadzenia takiego procesu decyzyjnego. Trudność psychologiczna polega tu na nieufności do skomplikowanych procedur agregacji ocen, jeśli się ich dobrze nie rozumie. Na przykład, sędziowie jazdy figurowej na łyżwach czy skoków narciarskich dokonują w praktyce ocen wielokryterialnych – ale mają ustalone tradycją sposoby agregacji tych ocen i wielokrotnie dyskutowane w grupach fachowców kryteria pomocnicze, służące do określania ocen zbiorczych. Grupa fachowców w danej dziedzinie konstrukcji inżynierskich też może się zgodzić na dokonanie ocen wielokryterialnych kilku konstrukcji, jeśli przedtem starannie przedyskutuje *problematykę modelowania sytuacji decyzyjnej*, czyli uzgodni sposoby opisu i kryteria oceny wariantów, sposoby ich agregacji, sposoby agregacji ocen wewnątrz grupy. Gorzej jednak jest w innych przypadkach – grup osób o różnorodnych specjalnościach, nie czujących się w pełni ekspertami w ocenianej dziedzinie, itp.; takie grupy będą nalegały na oceny bardzo ogólne, wyrażone w formie pojedynczego wskaźnika oceny, tak jak stopnie na egzaminach.

Wybór kryteriów dla ocen grupowych jest kwestią niezmiernie istotną. Oczywiście, muszą być to wskaźniki istotne dla danej sytuacji decyzyjnej, a sposób i skala ich pomiaru czy subiektywnej oceny muszą być dobrze zrozumiałe dla danej grupy. Warto też dla każdego z kryteriów określać nie tylko skalę czy zakres ocen, ale dyskutować i uzgadniać *poziomy aspiracji i rezerwacji* – odgrywające ogromną rolę zarówno w praktyce, jak i w teorii ocen czy optymalizacji wielokryterialnej. Należy się przy tym wystrzegać:

- *Pułapki narzędziowej*, polegającej na koncentracji uwagi na wskaźnikach czy kryteriach łatwych do pomiaru, ale o drugorzędnym znaczeniu, z pominięciem wskaźników o znaczeniu zasadniczym tylko dlatego, że są trudne do pomiaru bądź wymagają ocen intuicyjnych.

- *Nadmiernej liczby kryteriów komplementarnych* – to jest takich, których oceny łatwo ze sobą sumować (zwiększona ocena jednego z kryteriów komplementarnych kompensuje zmniejszoną ocenę innego kryterium). Kryteria takie zaciemniają istotę wyboru wielokryterialnego, polegającą na decyzji o kompromisie pomiędzy *kryteriami zasadniczymi* – czyli niekomplementarnymi.

- Zbyt uproszczonych sposobów agregacji (np. poprzez sumę ważoną) kryteriów zasadniczych, niekomplementarnych, dla oceny których potrzeba raczej stosować agregację przez nieliniową funkcję osiągnięcia z określeniem poziomów rezerwacji i aspiracji.

Ten ostatni komentarz warto zilustrować nieco bardziej obszernie. Metoda sumy ważonej polega na określeniu współczynników wagi α_k dla każdego z kryteriów czy atrybutów o ocenie q_k, $k = 1 \ldots K$, oraz obliczeniu oceny zagregowanej według wzoru:

$$s(\mathbf{q}, \alpha) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k q_k \tag{3}$$

gdzie zakłada się, że $0 \leqslant \alpha_k \leqslant 1$, $\sum_{k=1}^{K} \alpha_k = 1$. Przy tym założeniu, oceny atrybutów q_k powinny mieć ten sam wymiar lub lepiej być bezwymiarowe, co zawsze można osiągnąć np. poprzez podzielenie tych ocen przez ich zakres zmienności.

Stosowanie sumy ważonej ocen jako metody agregacji doprowadziło jednak do paradoksów i błędnych decyzji w wielu przypadkach praktycznych. Ułomność takiej metody ilustruje najlepiej następujący *paradoks Korhonena*; paradoks ten przytaczamy w nieco złagodzonej interpretacji (gdyż jego oryginalne sformułowanie, zawierające kryteria *sexappeal* oraz *umiejętność gotowania,* można traktować jako nieco *męsko-szowinistyczne*):

Przypuśćmy, że zagadnienie decyzyjne dotyczy wyboru partnera przeciwnej płci, przy czy rozpatrujemy tylko dwa kryteria: ocenę *seksapil* q_1 i ocenę *inteligencji* q_2. Przypuśćmy, że do wyboru jest trzech kandydatów (czy kandydatek) z następującymi ocenami: pierwszy 10 za seksapil, 0 za inteligencję, drugi 0 za seksapil, 10 za inteligencję, trzeci $4,5$ za seksapil i $4,5$ za inteligencję. Można łatwo udowodnić, że niezależnie od stosowanych współczynników wagi, zastosowanie agregacji przez sumę ważoną nigdy nie doprowadzi do wyboru wariantu trzeciego jako najlepszego; suma ważona preferuje zatem rozwiązania skrajne. Paradoks ten wskazuje, jak ułomną metodą jest liniowa agregacja atrybutów czy kryteriów (i rzeczywiście, w zastosowaniu do przetargów o zamówienia publiczne doprowadziła ona wielokrotnie do trudności sugerując wybór opcji o niezrównoważonych ocenach).

Wynika stąd, że preferencje decydenta pomiędzy poszczególnymi kryteriami wyrażają się zazwyczaj funkcją nieliniową. Jesli np. dla wszystkich atrybutów określimy poziomy rezerwacji (najniższą ocenę danego atrybutu, przy której powinniśmy rozważać dany wariant) oraz rezerwacji (ocenę danego atrybutu, która nas satysfakcjonuje), to powinniśmy zakładać inne znaczenie dla decydenta dodatnich przyrostów ocen ponad poziomy aspiracji, a inne znaczenie ujemnych przyrostów ocen poniżej poziomów aspiracji, itd. odnośnie poziomów rezerwacji. A więc realistyczna funkcja, modelująca preferencje decydenta (zwana dokładniej *funkcją wartości,* niekiedy potocznie *funkcją użyteczności*), powinna być nieliniowa, o innym charakterze poniżej, innym powyżej poziomów aspiracji.

Rozumowanie takie doprowadziło do opracowania t.zw. *metod punktu odniesienia*, w których funkcję wartości decydenta przybliża się za pomocą następującej funkcji nieliniowej, zwanej *funkcją osiągnięcia*, zależnej też od poziomów aspiracji p_k oraz rezerwacji r_k (dla każdego z atrybutów q_k, $k = 1 \ldots K$):

$$\sigma(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{r}) = (\min_{1 \leqslant k \leqslant K} \sigma_k(q_k, p_k, r_k) + \varepsilon \sum_{k=1}^{K} \sigma_k(q_k, p_k, r_k))/(1+\varepsilon) \tag{4}$$

gdzie $\varepsilon > 0$ jest małym współczynnikiem, a cząstkowe funkcje osiągnięcia σ_k mają postać:

$$\sigma_k(q_k, p_k, r_k) = \left\{ \begin{array}{cc} 1 + \alpha(q_k - p_k/(q_{k,up} - p_k), & p_k \leqslant q_k \leqslant q_{k,up} \\ (q_k - r_k)/(p_k - r_k), & r_k \leqslant q_k < p_k \\ \beta(q_k - r_k)/(r_k - q_{k,lo}), & q_{k,lo} \leqslant q_k < r_k \end{array} \right\} \tag{5}$$

Jeśli wybrać $\alpha = \beta = 1$, to pozostałe współczynniki w funkcji (4) zostały tak dobrane, aby jej wartość wynosiła -1, jeśli wszystkie oceny atrybutów są na poziomach dolnych $q_{k,lo}$, wynosiła 0 jeśli wszystkie oceny atrybutów są na poziomach rezerwacji r_k, wynosiła 1 jeśli wszystkie oceny atrybutów są na poziomach aspiracji p_k, wreszcie wynosiła 2 jeśli wszystkie oceny atrybutów są na poziomach górnych $q_{k,up}$. Daje to możliwość uporządkowania wszystkich wariantów w indywidualnej liście rankingowej według malejących wartości $\sigma(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{r})$ – tak, jakby wartości te aproksymowały funkcję wartości danego decydenta. Oczywiście, jest to tylko propozycja listy rankingowej, którą decydent może zaakceptować lub zmodyfikować.

Jeśli została przyjęta jednolita skala $0 \div 10$ dla wszystkich atrybutów, to sensowne jest też przyjęcie $\alpha = \beta = 10$ w powyższym wzorze. Wtedy wszystkie warianty niezadowalające – o ocenach poniżej poziomów rezerwacji – mają oceny skalarne w granicach $-10 \div 0$; wszystkie warianty zadowalające – o ocenach pomiędzy poziomami rezerwacji a aspiracji – mają oceny skalarne w granicach $0 \div 10$; wreszcie wszystkie warianty wybitne – o ocenach przekraczających aspiracje – mają oceny skalarne w granicach $10 \div 20$.

Wracając do problemu modelowania sytuacji decyzyjnej, dobry model to niewielka liczba kryteriów zasadniczych, niekomplementarnych, o dobrze określonej interpretacji i sposobie pomiaru lub oceny, z określonymi poziomami rezerwacji i aspiracji. Za maksymalną liczbę kryteriów przyjmuje się powszechnie siedem, niekiedy – dziewięć. W stosunku do kryteriów komplementarnych należy na wstępie określić sposoby ich agregacji do mniejszej liczby kryteriów zasadniczych, które to sposoby mogą opierać się na sumie prostej lub ważonej.

Istotny jest też dalszy sposób agregacji wielokryterialnej i grupowej. Wiąże on się też z zasadniczym pytaniem: *czy najpierw agregować wielokryterialnie wiele atrybutów oceny danego wariantu przez każdego z decydentów osobno w jego indywidualną ocenę* *łączną tego wariantu, a następnie postępować tak, jak przy grupowym wyborze jednokryterialnym, czy też odwrotnie – najpierw uśredniać w ramach grupy decydentów oceny dla każdego atrybutu i wariantu z osobna, a potem przyjąć uzgodniony sposób agregacji wielokryterialnej niejako uśrednionych ocen poszczególnych atrybutów?*

Pierwszy z tych sposobów ma większą tradycję w teorii decyzji; ale powinien być stosowany tylko wtedy, gdy w grupowym problemie wyboru chcemy podkreślić różnice preferencji czy interesów poszczególnych decydentów. Jeśli natomiast sytuacja wyboru grupowego jest w istocie zbliżona do wyboru zespołowego – to jest, jeśli oczekujemy od grupy podobnych lub wspólnych preferencji, natomiast wykorzystujemy ją dla porównania różnych spojrzeń fachowych na ocenę wskaźników o bardziej intuicyjnym czy subiektywnym charakterze – to uzasadniony jest sposób drugi. Trzeba wtedy najpierw uśrednić oceny poszczególnych atrybutów i wariantów w ramach grupy (lub obliczyć ich medianę)– wraz z ich dyskusją i ewentualną modyfikacją, gdyż opinia członka grupy uznanego przez nią za eksperta może (i powinna w sytuacji wyboru zespołowego, wbrew niektórym opiniom przestrzegającym przed narzucaniem opinii grupie) wpłynąć na ocenę innych członków grupy. Potem dopiero trzeba dokonać agregacji wielokryterialnej ocen uśrednionych.

Dopiero po zakończeniu analizy problematyki modelowania sytuacji decyzyjnej i generacji wariantów można przejść do problematyki wyboru wielokryterialnego. Istnieje przy tym wiele metod wspomagania takiego wyboru, jak np. metoda AHP oparta na agregacji liniowej, inne metody ELECTRE oraz PROMETHEE (zob. np. Vincke, 1992). Większość z tych metod nie jest jednak bezpośrednio przystosowana do wyboru grupowego, zakłada (naogół niejawnie) pojedynczego decydenta użytkującego te metody. Bezpośrednio dostosowana do pracy grupowej jest metoda oparta na funkcjach osiągnięcia typu (4), zwana SCDAS (zob. np. Wierzbicki *et. al.* 2000). Metoda ta zakłada nastepujący proces decyzyjny:

1) *Dyskusja wstępnej definicji problemu i procedur postępowania.*

2) *Dyskusja poziomów aspiracji i rezerwacji dla poszczególnych kryteriów.*

3) *Szczegółowa dyskusja wariantów decyzyjnych.*

4) *Indywidualne oceny wariantów decyzyjnych, indywidualna agregacja ocen wielokryterialnych, ustalenie indywidualnych list rankingowych.*

5) *Dyskusja różnic w indywidualnych ocenach wariantów decyzyjnych, z ewentualną zbiorową agregacją tych ocen.*

6) *Dyskusja różnic w indywidualnych rankingach wariantów, porównanie z możliwymi rankingami zbiorowymi.*

7) *Reasumpcja postępowania (powrót do punktów poprzednich) lub przyjęcie rankingu zbiorowego.*

System SCDAS, jak i wiele innych systemów oceny wielokryterialnej, zakłada dyskretny charakter opcji decyzyjnych. Jeśli odejść od założenia o danym z góry, dyskretnym zbiorze wariantów czy opcji decyzyjnych, to problemy decyzji grupowych stają się znacznie bogatsze, ale też komplikują się znacznie. Można wtedy wykorzystać metody optymalizacji wektorowej i wielokryterialnej analizy decyzji, omawiane np. w Wierzbicki *et al.* (2000). Tu podkreślimy tylko, że także w tym przypadku zalecane jest wykorzystanie metod punktu odniesienia oraz odpowiednich funkcji osiągnięcia.