

Sztuka i Techniki Negocjacji 10

prof. dr hab. inż. Andrzej P. Wierzbicki

1 października 2003

Wykład 10: Rozwiązania kooperatywne a negocjacje

10.1 Rozwiązania kooperatywne dla gier w postaci normalnej.

Rozpatrzmy tu przypadek podstawowy: dwóch graczy, o niezależnych decyzjach $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in X_0 = X_{01} \times X_{02}$, rezultaty (wygrane) $y_1 = f_1(x_1, x_2)$, $y_2 = f_2(x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$. Załóżmy, że jest to gra o niestałej sumie i gracze mogą zyskać przez kooperację (jak np. w dylemacie więźnia). Jakie wspólne decyzje są dla nich racjonalne?

Pytanie to nie ma jednoznacznej odpowiedzi, nawet w przypadku gier o stałej sumie (gdyby miało, nie trzeba by było negocjować). Przykładem prototypowym jest tu inna pułapka racjonalności, zwana grą podziału: przypuśćmy, że dwóch graczy ma do podziału określoną sumę, np. 100 zł. Jeśli uzgodnią między sobą sposób podziału w określonym czasie, to otrzymają uzgodnione sumy; jeśli jednak nie uzgodnią podziału, cała suma przepada (np. musi być wypłacona osobie trzeciej). Jak powinni podzielić tę sumę? Oczywiście, pół na pół, jeśli nie ma żadnych czynników dodatkowych w grze. Ale czynniki dodatkowe zawsze się pojawią. Jeśli jeden z graczy jest uboższy, a drugi bogatszy, to bogatszy może argumentować, że powinni podzielić tę sumę według proporcjonalnych przyrostu użyteczności dla każdego z graczy (a więc więcej dla bogatszego, który ma mniejszą użyteczność z danej sumy), natomiast uboższy, że sprawiedliwy podział powinien maksymalizować sumę ich użyteczności (a więc wszystko, a co najmniej większość, dla uboższego). Gdyby dać tę grę jako praktyczne ćwiczenie studentom i uzależnić oceny od osiągalnych rezultatów, to ich zachowanie zależało by też od stosowanej reguły ocen.

Jak wynika z tego przykładu, dla odpowiedzi na pytanie o racjonalną decyzję kooperatywną niezbędne jest określenie co najmniej dwóch elementów dodatkowych: punktu *status quo* $\bar{\mathbf{y}} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2)$, po angielsku *disagreement point*, określający jakie będą rezultaty graczy, jeśli nie dojdą do porozumienia — oraz założeń co do skal porównań użyteczności. J. Nash (1953) zaproponował odpowiedź na to pytanie niezależne od skal użyteczności i opierające się na pewnych aksjomatach racjonalnego podziału. Nazwał on ten problem *zadaniem przetargu* (*bargaining problem*) i określił następująco.

Problem jest w swej istocie niezależny od postaci funkcji f_1, f_2 , wystarczy go rozpatrywać w przestrzeni rezultatów gry. Dla określenia problemu przetargu wystarczy więc podać punkt *status quo* \bar{y} oraz zbiór \bar{Y} rezultatów niegorszych od *status quo*, który następująco wynika z przyjętego modelu gry:

$$\bar{Y} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 : y_1 = f_1(x_1, x_2) \geq \bar{y}_1, y_2 = f_2(x_1, x_2) \geq \bar{y}_2, x_1 \in X_{01}, x_2 \in X_{02}\} \quad (1)$$

Para (\bar{y}, \bar{Y}) określa więc problem przetargu i w tych terminach można go analizować, poszukując wektora $\hat{\mathbf{y}}$ rezultatów racjonalnego przetargu jako pewnego odwzorowania Φ tej pary:

$$\hat{\mathbf{y}} = \Phi(\bar{\mathbf{y}}, \bar{Y}) = (\Phi_1(\bar{\mathbf{y}}, \bar{Y}), \Phi_2(\bar{\mathbf{y}}, \bar{Y})) \in \bar{Y} \quad (2)$$

spełniającego dodatkowe aksjomaty racjonalności. Oczywiście, w zastosowaniach praktycznych trzeba określić także odpowiednie decyzje $\hat{\mathbf{x}}$ takie, że $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$.

Nash rozpatrywał ten problem przy założeniu, że zbiór \bar{Y} jest domknięty i wypukły, oraz przyjął następujące aksjomaty racjonalności przetargu:

- **A1. Sprawność:** $\hat{\mathbf{y}} = \Phi(\bar{\mathbf{y}}, \bar{Y})$ jest punktem sprawnym (Pareto-optymalnym) zbioru \bar{Y} .
- **A2. Indywidualna racjonalność:** $\hat{\mathbf{y}} = \Phi(\bar{\mathbf{y}}, \bar{Y}) \geq \bar{\mathbf{y}}$.
- **A3. Niezależność od skali użyteczności:** liniowe przekształcenia skali użyteczności i tym samym danych zadania:

$$\bar{W} = \{w_1 = \lambda_1 y_1 + \gamma_1, w_2 = \lambda_2 y_2 + \gamma_2, \mathbf{y} \in \bar{Y}\}; \bar{w} = (\lambda_1 \bar{y}_1 + \gamma_1, \lambda_2 \bar{y}_2 + \gamma_2)$$

dla dowolnych $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ i dowolnych γ_1, γ_2 nie wpływają istotnie na wynik, to jest powodują tylko jego analogiczne przekształcenie:

$$\Phi(\bar{\mathbf{w}}, \bar{W}) = (\lambda_1 \Phi_1(\bar{\mathbf{y}}, \bar{Y}) + \gamma_1, \lambda_2 \Phi_2(\bar{\mathbf{y}}, \bar{Y}) + \gamma_2)$$

- **A4. Niezależność od opcji nieistotnych:** dla dowolnego (domkniętego i wypukłego) zbioru $\bar{Y}' \subseteq \bar{Y}$, jeśli $\Phi(\bar{\mathbf{y}}, \bar{Y}) \in \bar{Y}'$, to $\Phi(\bar{\mathbf{y}}, \bar{Y}') = \Phi(\bar{\mathbf{y}}, \bar{Y})$.
- **A5. Symetria:** jeśli problem jest symetryczny, czyli jeśli $\bar{y}_1 = \bar{y}_2$ oraz $\{(y_2, y_1) \in \mathbb{R}^2 : (y_1, y_2) \in \bar{Y}\} = \bar{Y}$, to $\Phi_1(\bar{\mathbf{y}}, \bar{Y}) = \Phi_2(\bar{\mathbf{y}}, \bar{Y})$.

Aksjomaty: sprawności, indywidualnej racjonalności, niezależności od skali użyteczności oraz symetrii są bardzo naturalne. Naturalnym też wydaje się na pierwszy rzut oka aksjomat niezależności od ubocznych opcji nieistotnych, ale w istocie nie jest on naturalny – gdyż naprawdę mówi on, że cały kształt zbioru \bar{Y} poza odcinkiem $\bar{\mathbf{y}}, \Phi(\bar{\mathbf{y}}, \bar{Y})$ nie ma wpływu na rozwiązanie problemu (ilustracja na wykładzie).

Przy założeniu tych aksjomatów (oraz wypukłości, domkniętości i niepustości \bar{Y}) Nash udowodnił, że rozwiązanie problemu przetargu jest jednoznacznie określone jak następuje:

$$\Phi(\bar{y}, \bar{Y}) = \hat{y} = \operatorname{argmax}_{y \in \bar{Y}} (y_1 - \bar{y}_1)(y_2 - \bar{y}_2) \quad (3)$$

Jest to oczywiście poszukiwanie maksymalnego poziomu podstawowej hiperboli stycznej do zbioru \bar{Y} (i skoro jest to zbiór wypukły, to rozwiązanie jest oczywiście jednoznaczne); ilustracja na wykładzie.

Wobec kontrowersyjności aksjomatu A4, rezultat Nasha ma raczej znaczenie teoretyczne. Bardziej praktyczne rozwiązanie problemu przetargu zaproponował Raiffa; Kalai i Smorodinsky udowodnili, że rozwiązanie to jest jednoznacznym rozwiązaniem spełniającym aksjomaty A1-A5 z aksjomatem A4 zastąpionym przez następujący:

- **A4'. Indywidualna monotoniczność.** Jeśli powiększyć zbiór \bar{Y} tak, że zwiększeniu ulegnie maksymalny rezultat tylko dla jednego z graczy, na przykład:

$$\bar{Y} \subset \bar{Y}', \quad \max_{y \in \bar{Y}} y_1 < \max_{y \in \bar{Y}'} y_1, \quad \max_{y \in \bar{Y}} y_2 = \max_{y \in \bar{Y}'} y_2$$

to zwiększeniu ulegnie też rezultat kooperatywny przypisany temu graczowi:

$$\Phi_1(\bar{y}, \bar{Y}) < \Phi_1(\bar{y}, \bar{Y}')$$

(i analogicznie dla drugiego gracza). Ilustracja graficzna na wykładzie.

Oznaczmy:

$$\mathbf{y}_{uto} = \left(\max_{y \in \bar{Y}} y_1, \max_{y \in \bar{Y}} y_2 \right) \quad (4)$$

Punkt taki nazywamy *punktem utopijnym* dla zbioru \bar{Y} . Rozwiązanie Raiffy-Kalaia-Smorodinsky'ego jest wtedy (przy założeniach wypukłości, domkniętości i niepustości zbioru \bar{Y}) takim rezultatem sprawnym $\hat{y} \in \bar{Y}$, że:

$$\frac{\hat{y}_1 - \bar{y}_1}{\hat{y}_2 - \bar{y}_2} = \frac{y_{1,uto} - \bar{y}_1}{y_{2,uto} - \bar{y}_2} \quad (5)$$

Rozwiązanie to można interpretować jako wynik poszukiwania punktu sprawnego w zbiorze \bar{Y} na kierunku wyznaczonym przez punkty \bar{y} oraz \mathbf{y}_{uto} – ilustracja na wykładzie. Można je jednak też traktować jako rozwiązanie pewnego problemu optymalizacji. Mianowicie, rozpatrzmy następującą *funkcję osiągnięcia*:

$$\sigma(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}) = \min_{i=1,2} \frac{y_i - \bar{y}_i}{y_{i,uto} - \bar{y}_i} + \varepsilon \sum_{i=1}^2 \frac{y_i - \bar{y}_i}{y_{i,uto} - \bar{y}_i} \quad (6)$$

gdzie $\varepsilon \geq 0$ jest parametrem o odpowiednio małej wartości. Funkcje takie, z oczywistym uogólnieniem dla przypadku $n > 2$, stosuje się w wielokryterialnej optymalizacji i wspomaganiu decyzji: punkty maksymalne takich funkcji są zawsze punktami sprawnymi, a na położenie tych punktów maksymalnych na granicy Pareto zbioru \bar{Y} można wpływać przez zmianę punktu odniesienia $\bar{\mathbf{y}}$. W wielokryterialnej optymalizacji i wspomaganiu decyzji, punkt odniesienia wcale nie musi być punktem *status quo*, lecz może być dowolnie wybierany (jako $\bar{\mathbf{y}} \in \bar{Y}$ lub nawet $\bar{\mathbf{y}} \notin \bar{Y}$) przez decydenta – użytkownika systemu wspomaganie decyzji, który może wtedy w sposób ciągły i intuicyjnie naturalny wpływać poprzez zmianę takiego punktu na wybór rezultatu sprawnego – zob. np. Wierzbicki, Makowski i Wessels (2000). Stosowanie takich funkcji osiągnięcia, zależnych parametrycznie od punktu odniesienia, ma wiele zalet w porównaniu z klasycznymi, podręcznikowymi sposobami optymalizacji wielokryterialnej (czyli z maksymalizacją sumy ważonej kryteriów lub maksymalizacją wybranego kryterium przy nałożeniu dodatkowych ograniczeń na kryteria pozostałe).

W zastosowaniu do rozwiązania kooperatywnego Raiffy-Kalaia-Smorodinsky'ego, powyższa funkcja osiągnięcia określa po prostu to rozwiązanie poprzez swoje maksimum względem $\mathbf{y} \in \bar{Y}$ (jeśli ten zbiór jest wypukły; jeśli nie jest, to otrzymujemy uogólnienie tego rozwiązania):

$$\Phi(\bar{\mathbf{y}}, \bar{Y}) = \hat{\mathbf{y}} = \operatorname{argmax}_{\mathbf{y} \in \bar{Y}} \sigma(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}) \quad (7)$$

przy dostatecznie małych $\varepsilon \geq 0$ (w tym zastosowaniu można faktycznie przyjąć $\varepsilon = 0$, stosowanie $\varepsilon > 0$ zaleca się w ogólniejszych zastosowaniach do optymalizacji wielokryterialnej).

Powyższy sposób określania rozwiązania kooperatywnego można z łatwością uogólnić na więcej niż $n = 2$ graczy. Nieco trudniejsze jest uogólnienie na rozwiązania kooperatywne gier wielokryterialnych, zob. np. cytowaną już książkę Wierzbicki *et al.*

10.2 Rozwiązania kooperatywne dla gier w postaci koalicyjnej

Jeśli jest więcej graczy, niż dwóch, to można wprawdzie próbować uogólniać rozwiązania kooperatywne omawiane wyżej, ale zasadniczym problemem staje się określenie takiego rozwiązania, które nie byłoby zagrożone przez koalicję kilku graczy wykluczającą innych. Zagadnienie to można badać przy założeniu, że znane są wartości wygranych dla każdej możliwej koalicji kilku graczy (np. sumy wygranych graczy biorących udział w koalicji). Abstrahując od innych cech gry i określając tylko ta-

kie wartości wygranych, definiujemy t.zw. *funkcję charakterystyczną gry* w postaci koalicyjnej.

Niech $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$ oznacza koalicję wszystkich graczy (czyli rozwiązanie w pełni kooperatywne), natomiast $\mathcal{C} \subset \mathcal{N}$ jest jakąkolwiek koalicją mniejszą, w szczególności $\mathcal{C} = \{i\}$ oznacza koalicję jednoosobową, czyli samego gracza i .

Gra w postaci strategicznej dana jest przez jej funkcję charakterystyczną $v(\mathcal{C})$ dla wszystkich \mathcal{C} – od $\mathcal{C} = \{i\}$, $i = 1, \dots, n$, poprzez wszystkie koalicje kilkusobowe aż do $\mathcal{C} = \mathcal{N}$; koalicji takich może być $2^n - 1$. Funkcję tę interpretujemy jako gwarantowaną wygraną łączną danej koalicji, maksymalną względem jej własnych decyzji, ale przy założeniu gry przeciwko jakiegokolwiek wersji innych koalicji. Inni gracze mogą np. stworzyć przeciwko koalicję $\mathcal{N} \setminus \mathcal{C}$, grać każdy oddzielnie itp. – a więc $v(\mathcal{C})$ trzeba interpretować jako minimalną wartość wygranej koalicji \mathcal{C} względem różnych równowag niekooperatywnych wynikających z tych wersji. Nie jest przy tym gwarantowane, że dla danej gry w postaci normalnej potrafimy dobrze określić funkcję charakterystyczną (bo równowagi mogą być istotnie niejednoznaczne, tak jak w grze w tchórza). Tym niemniej, założenie określonej funkcji charakterystycznej – nawet kosztem pewnych uproszczeń – jest niezbędne dla analizy rozwiązań koalicyjnych gier (inaczej analiza ta, wobec dużej liczby możliwych koalicji, stawała by się niemal niemożliwa).

Formalnie, funkcję charakterystyczną gry w strategicznej formie koalicyjnej zapisujemy jako:

$$v(\mathcal{C}) = v_{\mathcal{C}}, \forall \mathcal{C} \in 2^{\mathcal{N}} \quad (8)$$

gdzie $2^{\mathcal{N}}$ jest zbiorem wszystkich podzbiorów $\mathcal{N} = \{1, \dots, i, \dots, n\}$. O funkcji tej zwykle zakładamy, że jest superaddytywna, czyli że:

$$v(\mathcal{C}' \cup \mathcal{C}'') \geq v(\mathcal{C}') + v(\mathcal{C}''), \text{ jeśli } \mathcal{C}' \cap \mathcal{C}'' = \emptyset \quad (9)$$

czyli że koalicje nie mogą stracić na możliwości łączenia się. Można wykazać, że jeśli określamy funkcję charakterystyczną gry za pomocą operacji *minmax* (minimum po innych koalicjach i ich decyzjach z maksimum po własnych decyzjach koalicji) z np. postaci wielomacierzowej gry, to funkcja ta jest superaddytywna; inne sposoby określania tej funkcji nie muszą gwarantować jej superaddytywności.

Przez *dopuszczalny podział wygranych koalicji* (*feasible allocation*) rozumiemy takie przydziały wygranych y_i , $i \in \mathcal{C}$, że:

$$\sum_{i \in \mathcal{C}} y_i \leq v(\mathcal{C}) \quad (10)$$

Oczywiście, gracze będą zainteresowani tylko takimi podziałami dopuszczalnymi, które nie mogą być ulepszone, czyli w których we wzorze powyższym zachodzi równość. Podstawowym warunkiem zgody na pełną koalizację graczy $\mathcal{C} = \mathcal{N}$ jest

warunek, aby żadna z możliwych podkoalicji nie mogła ulepszyć swego podziału opuszczając koalicję główną, czyli:

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} y_i = v(\mathcal{N}) \text{ oraz } \sum_{i \in \mathcal{C}} y_i \geq v(\mathcal{C}), \forall \mathcal{C} \subset \mathcal{N} \quad (11)$$

przy czym tu może występować nierówność silna w warunku $\sum_{i \in \mathcal{C}} y_i \geq v(\mathcal{C})$, gdyż w grze superaddytywnej gracze podkoalicji mogą zyskać wchodząc do koalicji większej. Zbiór wektorów $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, których składowe spełniają warunek (11) nazywamy *rdzeniem gry koalicyjnej* (ang. *core*). Podziały wygranych należące do rdzenia są bardzo atrakcyjnymi kandydatami na rozwiązanie koalicyjne, gdyż:

- wygrane wszystkich graczy są traktowane symetrycznie, a siła przetargowa graczy związana jest tylko z wygranymi podkoalicji, w których mogą wziąć udział;
- wszystkie rezultaty w rdzeniu są osiągalne i sprawne w sensie Pareto w przestrzeni wypłat wszystkich graczy;
- żadnej z podkoalicji nie opłaca się opuszczać koalicji pełnej, jeśli proponowany podział wypłat jest w rdzeniu gry.

Przykład (na podstawie książki Raiffy, patrz literatura). Rozważmy trzy firmy, które negocjują połączenie i dyskutują możliwe podziały akcji po połączeniu. Przeprowadziły one staranne badania rynkowe i określiły wartość każdej z firm, każdej z koalicji dwóch firm oraz koalicji pełnej (np. mierzoną przewidywaną wartością sprzedaży produktów każdej z koalicji, w M\$). Przypuśćmy, że wartości te są następujące:

v_1	v_2	v_3	v_{12}	$v_3 \setminus v_{12}$	v_{13}	$v_2 \setminus v_{13}$	v_{23}	$v_1 \setminus v_{23}$	v_{123}
32	23	6	59	5	45	22	39	30	77

gdzie, dla dodania realizmu, zacytowaliśmy też wartości $v_i \setminus v_{jk}$ takie, które firma i uzyskalaby konkurując z koalicją firm j oraz k ; przy minimaxowym określaniu wartości gry, te właśnie wartości $v_i \setminus v_{jk}$ powinniśmy stosować zamiast v_i . Rdzeń gry określony jest więc przez następujące nierówności:

$$y_1 \geq 30, y_2 \geq 22, y_3 \geq 5, y_1 + y_2 \geq 59, y_1 + y_3 \geq 45, y_2 + y_3 \geq 39, y_1 + y_2 + y_3 = 77 \quad (12)$$

Eliminując zmienną y_3 na podstawie ostatniej równości, możemy te nierówności wyrazić następująco:

$$30 \leq y_1 \leq 38, 22 \leq y_2 \leq 32, 59 \leq y_1 + y_2 \leq 72 \quad (13)$$

i łatwo sprawdzić, że nierówności te mają rozwiązania – *rdzeń gry jest niepusty*. Zbiór warunków (13) jest wprawdzie łatwiejszy do analizy graficznej (ilustracja na wykładzie), ale może wprowadzać w błąd perspektywy zorientowanej wyłącznie na firmy 1 i 2. Na przykład, możemy stwierdzić – to przecież jest zadanie wielokryterialnej analizy problemu programowania liniowego, a więc najlepszy, sprawny podział to $\mathbf{y} = (38, 32, 7)$. To prawda, ale wyłącznie z perspektywy firm 1 i 2; jeśli włączymy w to także perspektywę firmy 3, to jest więcej podziałów sprawnych, a podział kompromisowy znajduje się gdzieś w środku rdzenia. Jaki zaś wybrać podział kompromisowy – to właśnie może być przedmiotem negocjacji.

Rdzeń gry może być pusty. Zmodyfikujmy tabelę w powyższym przykładzie następująco:

v_1	v_2	v_3	v_{12}	$v_3 \setminus v_{12}$	v_{13}	$v_2 \setminus v_{13}$	v_{23}	$v_1 \setminus v_{23}$	v_{123}
0	0	0	60	0	56	0	50	0	80

Nierówności $y_1 + y_2 \geq 60$, $y_1 + y_3 \geq 56$, $y_2 + y_3 \geq 50$ sumują się do $2(y_1 + y_2 + y_3) \geq 166$, czyli $y_1 + y_2 + y_3 \geq 83$, podczas gdy pełna koalicja może zapewnić tylko $y_1 + y_2 + y_3 = 80$. Ale ta ocena wartości połączonych trzech firm może im wydawać się zbyt ostrożna – firmy mogą mieć nadzieję, że po połączeniu wywalczą sobie jednak większy udział w rynku (wszystko to może np. zależeć od założonych w analizie rynku współczynników elastyczności, patrz wykłady poprzednie). Jeśli takie czynniki dodatkowe przemawiają za pełną koalicją, to pomimo pustego rdzenia można znaleźć podział wygranych dopuszczalny do akceptacji przez graczy. *Rozszerzony δ -rdzeń* definiowany jest wtedy tak, jakby pełna koalicja miała dodatkową wartość δ :

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} y_i = v(\mathcal{N}) + \delta \text{ oraz } \sum_{i \in \mathcal{C}} y_i \geq v(\mathcal{C}) \quad \forall \mathcal{C} \subseteq \mathcal{N} \quad (14)$$

gdzie wartość zmiennej pomocniczej δ może być dobrana jako taka jej najmniejsza wartość, która zapewni niepusty rdzeń (który staje się wtedy często jednym tylko punktem). Ponieważ tak obliczony podział wygranych jest zazwyczaj niedopuszczalny dla gry w pierwotnym sformułowaniu, trzeba go potraktować jako swoisty punkt aspiracji i znaleźć bliski mu punkt w zbiorze określonym przez $\sum_{i \in \mathcal{N}} y_i = v(\mathcal{N})$.

W teorii gier koalicyjnych zwraca się też uwagę na fakt, że rozwiązania w rdzeniu – nawet jeśli jest niepusty – mogą faworyzować graczy w pewnym sensie silniejszych. Dlatego też wprowadza się pojęcie *ϵ -rdzenia*, w pewnym sensie dualne do δ -rdzenia:

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} y_i = v(\mathcal{N}) \text{ oraz } \sum_{i \in \mathcal{C}} y_i \geq v(\mathcal{C}) - \epsilon |\mathcal{C}| \quad \forall \mathcal{C} \subseteq \mathcal{N} \quad (15)$$

gdzie $|\mathcal{C}|$ jest liczebnością koalicji \mathcal{C} . Oznacza to, że żadna z podkoalicji nie może zaofiarować graczom podziału wypłat lepszego o ϵ dla każdego gracza, niż uzyskiwany w ϵ -rdzeniu. Jeśli rdzeń jest pusty, to znów możemy obliczać najmniejsze ϵ

zapewniające niepusty ϵ -rdzeń. Zaletą ϵ -rdzenia jest obliczanie za jego pomocą podziału wypłat, który jest dopuszczalny dla gry pierwotnej bez żadnych modyfikacji. Odmianą ϵ -rdzenia jest *względny ϵ -rdzeń*, gdzie zakładamy, że żadna z koalicji nie może zaoferować graczom wypłat o ϵ % większych, niż uzyskiwane we względnym ϵ -rdzeniu, który definiowany jest wobec tego jako zbiór takich wektorów $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, których składowe spełniają warunki:

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} y_i = v(\mathcal{N}) \text{ oraz } \sum_{i \in \mathcal{C}} y_i \geq v(\mathcal{C}) \left(1 - \frac{\epsilon}{100}\right) \quad \forall \mathcal{C} \subseteq \mathcal{N} \quad (16)$$

W praktycznych negocjacjach koalicyjnych istotne jest często pojęcie *synergii* wnoszonej przez poszczególnych graczy do różnych koalicji: dołączenie danego gracza do jakiejś koalicji ma tym większe znaczenie, im większy on wnosi przyrost funkcji charakterystycznej. Synergię danego gracza i względem koalicji \mathcal{C} , $i \notin \mathcal{C}$, określamy zatem jako

$$s(i, \mathcal{C}) = v(\mathcal{C} \cup \{i\}) - v(\mathcal{C}) \quad (17)$$

Wartość synergii może być wykorzystana w argumentacji negocjacyjnej; może też być użyta do obliczenia innego dopuszczalnego podziału rezultatów pomiędzy graczy. Załóżmy, że rozpatrzmy wszystkie możliwe synergie przy przypadkowych kolejnościach tworzenia koalicji, a ich współczynniki wagi określimy kombinatorycznie – jako prawdopodobieństwo tego, że przy przypadkowym uporządkowaniu graczy dany gracz i znajduje się zaraz za koalicją \mathcal{C} , wynoszące: $\frac{|\mathcal{C}|!(|\mathcal{N}|-|\mathcal{C}|-1)!}{|\mathcal{N}|!}$. Tak obliczony przydział wygranej dla danego gracza i (zależny od całej funkcji charakterystycznej \mathbf{v}) nazywamy *wartością Shapley'a*:

$$y_i = \Phi_i(\mathbf{v}) = \sum_{\mathcal{C} \subseteq \mathcal{N} \setminus \{i\}} (v(\mathcal{C} \cup \{i\}) - v(\mathcal{C})) \frac{|\mathcal{C}|!(|\mathcal{N}|-|\mathcal{C}|-1)!}{|\mathcal{N}|!} \quad (18)$$

Wartość Shapleya była przez jej autora uzasadniona w sposób aksjomatyczny, ale jej znaczenie praktyczne jest mniejsze, niż rdzenia czy ϵ -rdzenia. Łatwo wprawdzie sprawdzić, że dla superaddytywnej funkcji charakterystycznej wartość Shapleya jest indywidualnie racjonalna, $\Phi_i(\mathbf{v}) \geq v(\{i\})$, ale może ona nie być elementem rdzenia nawet w przypadku, gdy jest on niepusty; zatem rozmaitym podkoalicjom może się opłacać opuszczać koalicję pełną, jeśli ta umówi się o podział wypłat według wartości Shapleya. Wartość Shapleya może być jednak użyta jako argument w negocjacjach, gdyż charakteryzuje ona w pewnym sensie *średnią wartość danego gracza przy tworzeniu koalicji*. Można więc, w przypadku niepustego rdzenia, obliczać wartość Shapleya, a następnie starać się znaleźć dopuszczalny podział wygranych zawarty w rdzeniu oraz najbliższy wartości Shapleya.