ANL2. Zestaw 10

1. Sprawdzić, czy funkcja f spełnia warunki Cauchy'ego-Riemanna, jeśli

   (a) $f(z) = z^3 + iz$

   (b) $f(z) = z|z|^2$

   (c) $f(z) = \operatorname{Re}(z^2)\,\bar{z}$

2. Obliczyć, jeśli istnieje, pochodną $f'(z)$ oraz zbadać holomorficzność funkcji

   (a) $f(z) = \operatorname{Im}(z+i)^2$

   (b) $f(z) = e^{\bar{z}}$

   (c) $f(x+iy) = x(2-x) + y^2 + i2y(1-x)$

3. Obliczyć $\int_C f(z)dz$, gdzie

   (a) $f(z) = z^2 - 2z$, C – odcinek o początku 1 i końcu i

   (b) $f(z) = z|z|$, C – ćwierć okręgu $|z| = 2$ od punktu $2i$ do punktu 2

   (c) $f(z) = \frac{|z|^2}{(z-i)^2}$, C – ujemnie skierowany okrąg $|z-i| = 4$

   (d) $f(z) = \frac{\bar{z}}{(z+i)^3}$, C – ujemnie skierowany okrąg $|z+i| = 3$

   (e) $f(z) = \operatorname{Im} z \cdot (z-1)^{-1}$, C – ujemnie skierowany okrąg $|z-1| = 2$

4. Obliczyć
$$\int_C \frac{z}{z^4-1}\,dz$$
   gdzie C jest dodatnio zorientowanym okręgiem

   (a) $|z-i| = 1$

   (b) $|z-i| = 3$

   (c) $|z-3| = 1$

(d) $|z-2+2i| = 2\sqrt{2}$

5. Obliczyć

$$\int_C \frac{\sin 2z}{z^4-4}\,dz$$

gdzie C jest dodatnio zorientowanym okręgiem

(a) $|z-2| = 1$

(b) $|z+3| = 2$

(c) $|z| = 1$

(d) $|z| = 3$

6. Obliczyć

$$\int_C \frac{dz}{(z^2+1)^2}$$

gdzie C jest dodatnio zorientowanym okręgiem

(a) $|z-i| = 1$

(b) $|z-2i| = 2$

(c) $|z+1| = 1$

(d) $|z+1| = 2$

7. Obliczyć całkę

$$\oint_C \left(e^{-z^2} + \frac{z}{z+1}\right) dz$$

gdzie $C = \{\, z : z(t) = \frac{3}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it},\ t \in [0, 2\pi] \,\}$