ANL2. ZESTAW 8-9

1. Obliczyć całkę krzywoliniową skierowaną wyrażenia $ydx + x(y - x)dy$ po łączącym punkty $A = (0, 0)$ i $B = (1, 4)$ odcinku

   (a) prostej $y = 4x$

   (b) paraboli $y = 4x^2$

   (c) paraboli $16x = y^2$

2. Obliczyć całkę krzywoliniową skierowaną

   (a) $\int_C (2 - y)dx + xdy$, gdzie C jest łukiem cykloidy $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ o początku $(0, 0)$ i końcu $(2\pi, 0)$

   (b) $\int_C x^3dx + y^3dy$, gdzie C jest górnym łukiem elipsy $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ o początku $(-2, 0)$ i końcu $(2, 0)$

   (c) $\oint_C \cos(x+y)dx + ydy$, gdzie C jest brzegiem trójkąta o wierzchołkach $(0, 0), (\frac{\pi}{2}, 0), (0, \frac{\pi}{2})$ skierowanym dodatnio względem wnętrza

   (d) $\oint_C (x\sqrt{x^2 + y^2}+2xy)dx + y\sqrt{x^2 + y^2}dy$, gdzie C jest brzegiem obszaru $D = \{(x, y) : x \in [1, 3],\ |x-2| \le y \le 1\}$ skierowanym dodatnio względem wnętrza

3. Sprawdzić tezę twierdzenia Greena

   (a) $\oint_C (xy-x)dx + (y-x^2)dy$, gdzie C jest brzegiem obszaru D – górna połowa elipsy $\frac{x^2}{4} + y^2 \le 1$

   (b) $\oint_C (xy - x)dx + (y - x^2)dy$, gdzie C jest brzegiem kwadratu $[0, 1] \times [0, 1]$

   (c) $\oint_C 2xydx - ydy$, gdzie C jest brzegiem kwadratu o środku $(1, 2)$ i wierzchołku $(3, 0)$

   (d) $\oint_C (x + y)(x - y)dx$, gdzie C jest brzegiem tej ćwiartki koła $x^2 + y^2 \le 9$, na której brzegu leżą punkty $(1, 1)$ i $(0, 3)$

4. Obliczyć całki

   (a) $\oint_{K^-} (4xy^3 + y^3 - 5x^2)dx + (6x^2y^2 + y^4 - x^3)dy$, gdzie K^- – ujemnie skierowany brzeg trójkąta o wierzchołkach $(0, 0), (1, 1), (1, 2)$

   (b) $\oint_{K^+} (x + y)(x - y)dx + \cos(y^{2017})dy$, gdzie K^+ – dodatnio skierowany brzeg trójkąta o wierzchołkach $(0, 0), (1, 1), (-1, 1)$

   (c) $\oint_{K^+} (x^2 + y^2 + e^x)dx + (x - 2xy + e^y)dy$, gdzie K^+ – dodatnio skierowany brzeg elipsy $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

5. Uzasadnić niezależność całki od drogi całkowania i (być może wyznaczając odpowiedni potencjał) obliczyć

   (a) $\int_{AB}(3x^2-2xy+y^2)dx+(2xy-x^2-3y^2)dy$, po dowolnym gładkim łuku o początku $A(2,-1)$ i końcu $B(1,0)$

   (b) $\int_{AB}(2x\cos y-y^2\sin x)dx+(2y\cos x-x^2\sin y)dy$, po dowolnym gładkim łuku o początku $A(\pi,0)$ i końcu $B(\pi,\pi)$

6. Obliczyć całkę

$$\int_{\widehat{AB}}(y^3+2\sin x-y)dx+(3xy^2-x)dy$$

po biegnącym od punktu $A(\pi,0)$ do punktu $B(0,\pi)$ łuku okręgu o środku (π,π).