ANL2. ZESTAW 1-2

1. Wyznaczyć promień zbieżności i przedział zbieżności szeregów potęgowych

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2n+1}$

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6-2x)^n}{3^n+2^n}$

   (c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n2^n \cdot \ln n}$

   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n+1}(x-1)^{n+2}$

2. Zbadać, dla jakich $x \in \mathbf{R}$ zbieżny jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n(x^2+1)^n}$$

3. Znaleźć sumę szeregu potęgowego

   (a) $x + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{4n+1}}{4n+1} + \ldots$

   (b) $\frac{x^2}{2} + \frac{x^6}{6} + \ldots + \frac{x^{4n+2}}{4n+2} + \ldots$

   (c) $\frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{(n-1)\cdot n} + \ldots$

4. Obliczyć sumy szeregów liczbowych

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{3^n}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}$

5. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcje

   (a) $f(x) = x^4 e^{-2x}$

   (b) $f(x) = 2\sin x \sin 3x$

   (c) $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$

   (d) $f(x) = \frac{x}{1+x-2x^2}$

6. Rozwinąć w szereg Taylora wokół punktu x_0 funkcje

   (a) $f(x) = \ln x, \quad x_0 = 1$

   (b) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = 3$

7. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję, a następnie podać odpowiednią pochodną

   (a) $f(x) = \frac{3-2x+3x^2}{1+x^3} \quad f^{(17)}(0)$

   (b) $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2+x^3} \quad f^{(2000)}(0),\ f^{(2001)}(0)$

   (c) $f(x) = \frac{x^5}{x^3+x^2+x+1} \quad f^{(9)}(0),\ f^{(10)}(0)$

   (d) $f(x) = \frac{1-x}{1+x} \quad f^{(28)}(0),\ f^{(29}(0)$

   (e) $f(x) = \frac{2-x}{1+x^4} \quad f^{(88)}(0),\ f^{(89)}(0)$

   (f) $f(x) =$arctg $x \quad f^{(141)}(0),\ f^{(142)}(0)$

   (g) $f(x) = x^3(\cos x - 1) \quad f^{(18)}(0),\ f^{(19)}(0)$

8. Wiedząc, że prawdziwa jest równość

$$\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} t^n \quad \text{dla} \quad \text{t} \in (-1, 1]$$

   rozwinąć funkcję $f(x) = \ln(x+2)$ w szereg Taylora w otoczeniu punktu $x_0 = -1$, a następnie funkcję $g(x) = x\ln(x+2)$.

9. Korzystając z wzoru z poprzedniego zadania, wyznaczyć rozwinięcie w szereg Taylora w otoczeniu punktu $x_0 = -3$, funkcji $f(x) = \ln(7+2x)$. Dla jakich x prawdziwe jest to rozwinięcie? Obliczyć $f^{(26)}(-3)$.