Sformalizowane teorie matematyczne

W początkowym okresie rozwoju teoria mnogości budowana była w oparciu na intuicyjnym pojęciu zbioru.
Metoda ta okazała się zawodna, gdyż nie można było uzyskać jednoznacznych odpowiedzi na bardziej subtelne pytania dotyczące własności zbiorów.
W konsekwencji pojawiły się antynomie (sprzeczności), których nie można było uniknąć na drodze samego odwoływania się do intuicji.

Uściśleniem intuicyjnych teorii matematycznych są teorie aksjomatyczne. Potrzebę budowania teorii matematycznych w sposób aksjomatyczny odczuwano już w starożytności. Aksjomatyczny system geometrii przedstawiony przez Euklidesa w IV w. p. n. e. przetrwał do naszych czasów.

W teorii aksjomatycznej wybiera się pojęcia, które mają w niej występować i charakteryzuje się je za pomocą układu aksjomatów. Pojęcia te nazywamy pojęciami pierwotnymi teorii. Na gruncie teorii aksjomatycznej można operować tylko pojęciami pierwotnym lub zdefiniowanymi za pomocą tych pojęć. Za twierdzenia teorii uznaje się zdania, które dają się uzyskać z aksjomatów za pomocą poprawnego rozumowania. Wszelkie własności pojęć danej teorii nie figurujące w aksjomatach wymagają dowodu.

Antynomie intuicyjnej teorii mnogości eliminuje się na gruncie aksjomatycznej teorii mnogości. Pierwsze sformułowanie układu aksjomatów teorii mnogości podał Zermelo w 1904 r. Układ ten był później wielokrotnie uzupełniany i przekształcany. Obecnie istnieją różne metody aksjomatyzacji teorii mnogości, ale powszechnie za podstawę współczesnej matematyki przyjmuje się aksjomatykę Zermelo – Fraenkla z pewnikiem wyboru (ZFC).

Aksjomatyzacja teorii mnogości (ZFC)

Pojęciem pierwotnym jest zbiór i relacja należenia do zbioru.

W teorii mnogości obiekty: element zbioru, zbiór i rodzina zbiorów traktowane są równorzędnie i oznaczane jednakowo np. literami u, v, x, y, z,… .

I. Aksjomat istnienia

„*Istnieje zbiór pusty, czyli zbiór, który nie ma żadnych elementów*”:

$$(\exists x)\,(\forall y)\ \neg y \in x$$

Aksjomat ten można sformułować równoważnie: „*Istnieje jakiś zbiór*”.

II. Aksjomat ekstensjonalności

„*Zbiory u i v są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają takie same elementy*”:

$$\forall u\, \forall v\, ((\forall x\, (x \in u \Leftrightarrow x \in V)) \Leftrightarrow u = v$$

III. Aksjomat regularności (ufundowania)

„*W każdym zbiorze niepustym x istnieje element y, do którego nie należą elementy zbioru x*”: $(\forall x)(x \neq \varnothing \Rightarrow (\exists y \in x)(\forall z \in x)\, \neg z \in y)$

Aksjomat ten eliminuje patologiczne sytuacje: nie istnieje zbiór, który jest swoim własnym elementem.

IV. Aksjomat wyróżniania (wycinania, podzbiorów)

„*Niech* $f(x)$ *będzie dowolną funkcją zdaniową o zakresie zmiennej* $x \in X$ *.*
Wtedy istnieje zbiór $\{z \in X : \ f(z)\}$ ”

$$(\forall X)(\exists Y)(\forall z)\,(z \in Y \ \Leftrightarrow\ z \in X \wedge f(z))$$

V. Aksjomat pary

„Dla dowolnych zbiorów x i y istnieje ich para nieuporządkowana {x,y}”:

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall t)\ (t \in z \iff t = x \vee t = y)$$

Z aksjomatu tego wynika, że istnieją zbiory 1- i 2-elementowe, można również zdefiniować parę uporządkowaną.

VI. Aksjomat sumy

„Dla dowolnej rodziny (zbioru) x istnieje jej suma $\cup x$”:

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)\ (z \in y \iff (\exists t \in x)\ z \in t)$$

Aksjomat ten gwarantuje istnienie zbiorów o dowolnej skończonej liczbie elementów.

VII. Aksjomat zbioru potęgowego

„Dla dowolnego zbioru x istnieje zbiór jego wszystkich podzbiorów P(x)”:

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)\ (z \in y \Leftrightarrow z \subseteq x)$$

VIII. Aksjomat nieskończoności

„Istnieje zbiór nieskończony (induktywny)”:

$$(\exists x)(\varnothing \in x \wedge \forall y\ (y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x))$$

Dzięki temu aksjomatowi można wprowadzić zasadę indukcji matematycznej.

IX. Aksjomat zastępowania

„Niech $y\ (x,y)$ *- funkcja zdaniowa o zakresie zmiennej* $x \in X$. *Jeśli* $\forall x \in X$ *istnieje dokładnie jeden y taki, że* $y\ (x,y)$, *to istnieje zbiór* $\{z:\ (\exists t \in X)\ y\ (t,z\}$”:

$$(\forall X)\Big(\big((\forall x \in X)(\exists! y)\, y\ (x,y)\big) \Rightarrow \big((\exists Z)(\forall x \in X)\ (\exists z \in Z\ \ y\ (x,z)\big)\Big)$$

jest zdanie prawdziwym dla każdej formuły ψ.

X. Aksjomat wyboru (pewnik wyboru)

„Dla każdej rodziny zbiorów u, której elementy są niepuste i parami rozłączne istnieje zbiór v, który ma dokładnie jeden element wspólny z każdym zbiorem rodziny u”:

$$\forall x \left((\forall y, z \in x) \left(y \neq \varnothing \wedge (y \neq z \Rightarrow y \cap z = \varnothing) \right) \Rightarrow (\exists s)(\forall y \in x)(\exists! t)\, t \in y \cap s \right)$$

Pewnik wyboru ma szerokie zastosowania, bez niego nie można udowodnić wielu ważnych twierdzeń matematyki. Aksjomat ten umożliwia przeprowadzenie niekonstruktywnych dowodów istnienia różnych obiektów matematycznych – postuluje on istnienie funkcji, które nie zostały w żaden sposób zdefiniowane:

Dla dowolnej rodziny A złożonej z niepustych zbiorów istnieje funkcja wyboru, to znaczy funkcja $f : A \to \cup A$ taka, że $f(v) \in v \;\; \forall v \in A$.

Niekonstruktywny charakter aksjomatu i dosyć nieoczekiwane wnioski z niego spowodowały, że przez wiele lat był on wśród matematyków przedmiotem kontrowersji. One spowodowały, że w oznaczeniu ZFC pojawiła się litera C (choice) dla podkreślenia, że pewnik wyboru jest jednym z aksjomatów teorii na równi z innymi. Aksjomat wyboru jest narzędziem powszechnie stosowanym we współczesnej matematyce.

Formalizacja teorii

Pierwszym etapem w procesie formalizowania danej teorii matematycznej jest formalizacja języka teorii.

Ustalamy najpierw system symboli, zwanych znakami pierwotnymi teorii

i wprowadzamy reguły (gramatyka), które pozwalają nam w ściśle określony sposób z tych symboli konstruować wyrażenia, którymi wolno w danej teorii operować. Wyrażenia takie nazywamy formułami teorii.

Wśród znaków pierwotnych teorii wyróżnia się stałe specyficzne teorii (np. dla arytmetyki: 1, +, ·, =, <, ...). W każdym języku występują tzw. zmienne indywiduowe, czyli symbole oznaczające dowolne obiekty, którymi zajmuje się dana teoria (n. p. $x, y, A, B, a_1, a_2, \ldots$).

Wśród wszystkich formuł języka teorii wyróżniamy te, które traktujemy jako odpowiedniki jej aksjomatów.

Następnym etapem jest wybór aksjomatów logicznych i reguł dowodzenia, które łącznie stanowią aparat logiczny teorii. Aksjomaty logiczne wybieramy spośród tautologii logicznych.

Następnie precyzujemy pojęcie dowodu w postaci tzw. dowodu formalnego: dowodem formalnym dla dowolnej formuły F z języka teorii nazywamy każdy skończony ciąg formuł teorii, taki, że każda z formuł tego ciągu jest bądź aksjomatem specyficznym, bądź aksjomatem logicznym, bądź powstaje z wcześniejszych formuł tego ciągu przez stosowanie reguł dowodzenia, przy czym ostatnią formułą w ciągu jest F.

Twierdzeniami sformalizowanej teorii nazywamy te formuły, dla których istnieje dowód formalny.

Metamatematyka

Metamatematyka, to dziedzina badająca sformalizowane teorie matematyczne. Jej najważniejszymi zagadnieniami są: niesprzeczność, zupełność i rozstrzygalność.

O teorii sformalizowanej mówimy, że jest niesprzeczna (spójna), jeśli na jej gruncie nie można przeprowadzić dowodu formalnego dla formuły F i dla jej zaprzeczenia.

Teoria jest sprzeczna wtedy i tylko wtedy, gdy pewne zdanie i jego zaprzeczenie są jej twierdzeniami. Jeśli teoria jest sprzeczna, to każde zdanie jest jej twierdzeniem i taka teoria jest bezwartościowa.

Mówimy, że teoria jest zupełna, jeśli każde zdanie lub jego zaprzeczenie jest twierdzeniem, czyli dla każdej formuły języka teorii reprezentującej zdanie (a więc takiej, która nie ma zmiennych wolnych) istnieje dowód formalny tej formuły lub jej negacji.

Teoria sformalizowana, która takiej własności nie ma, nazywa się niezupełna.

Teoria jest więc niezupełna , jeśli istnieje w niej tzw. zdanie nierozstrzygalne, czyli taka formuła bez zmiennych wolnych, że ani ona, ani jej zaprzeczenie nie jest twierdzeniem teorii.

Teoria sformalizowana nazywa się rozstrzygalna, jeśli istnieje metoda (algorytm) pozwalająca za pomocą skończonej liczby kroków stwierdzić, czy dowolna formuła tej teorii jest jej twierdzeniem, czy też nie jest.

Jeśli teoria jest rozstrzygalna i znamy algorytm rozstrzygania, to badanie problemów dających zapisać się w języku takiej teorii sprowadza się do czysto mechanicznych czynności (n. p. metoda 0 – 1 sprawdzania prawdziwości zdań logicznych). W teoriach nierozstrzygalnych badanie wielu zagadnień wymaga pewnego pomysłu. Okazało się, że na ogół teorie matematyczne są nierozstrzygalne. Do teorii nierozstrzygalnych należy arytmetyka liczb naturalnych.

Rachunek zdań jest teorią niesprzeczną, zupełną i rozstrzygalną.

Teoria mnogości jest nierozstrzygalna i niezupełna. Zagadnienie niesprzeczności tej teorii jest nierozwiązywalne.

Formalizm w matematyce

Formalizm to kierunek w filozofii matematyki wywodzący się z logicyzmu, który postuluje, że matematyka jest pewnym systemem formalnym, który zawiera pewne aksjomaty, zespół definicji oraz wyprowadza swoje wnioski w oparciu o te pojęcia korzystając z rachunku logicznego zdań.

W szczególności filozoficznym aspektem formalizmu w matematyce jest twierdzenie, że prawdy matematyczne nie niosą w sobie żadnej treści poza tą związaną z wykonaną w mechaniczny sposób kalkulacją. Dowolne twierdzenie matematyki możliwe jest do wyprodukowania w procesie mechanicznej generacji zdań systemu formalnego.

Idea formalizmu w matematyce powstała w związku z programem Hilberta (1904 r.), którego myślą przewodnią było zbudowanie teorii sformalizowanej obejmującej całą matematykę i udowodnienie jej niesprzeczności za pomocą bardzo prostych środków logicznych.

Wielkimi nadziejami pokładanymi w takim rozumieniu podstaw matematyki zachwiał Kurt Gödel dowodząc twierdzenia o niezupełności systemów formalnych zawierających arytmetykę liczb naturalnych.

Twierdzenia Gödla

I twierdzenie Gödla (o niezupełności) (1930 r.) głosi, że dowolny system formalny zawierający aksjomaty arytmetyki liczb naturalnych, jest albo zupełny albo spójny i nigdy nie posiada obu tych cech jednocześnie.

Innymi słowy; jeśli system jest zupełny, to wówczas istnieje w nim pewne zdanie P, które można udowodnić i którego zaprzeczenie ~P również można udowodnić, czyli system jest sprzeczny wewnętrznie. Jeżeli system nie jest sprzeczny, to istnieją w nim zdania, których prawdziwości nie da się wywieść z aksjomatów i twierdzeń rozważanego systemu formalnego.

Gödel stawiał sobie pytania: Czym jest dowód? Czy dowód jest równoznaczny z prawdą? Czy wszystko, co prawdziwe może być zawsze udowodnione?

Dowód tw. Gödla polega na skonstruowaniu zdania prawdziwego, którego nie da się dowieść w matematyce liczb naturalnych.

Odróżnia się prawdziwo**ść** zdania od możliwości jego udowodnienia. Zdania dowiedlne w danej teorii stanowią podzbiór właściwy zdań prawdziwych tej teorii.

Pojęcie prawdy jest związane ze znaczeniem (treścią) zdania, interpretacji formuły w modelu (konkretnej dziedzinie). Prawdziwość jest związana z pojęciem spe**ł**niania (funkcji zdaniowej przez ciąg elementów, czy zdania przez model).

II twierdzenie Gödla (o niedowodliwości spójności) jest konsekwencją I twierdzenia. Głosi ono, że dowód niesprzeczności każdej sformalizowanej teorii zawierającej arytmetykę liczb naturalnych można przeprowadzić jedynie na gruncie teorii obszerniejszej od tej, której niesprzeczność chcemy udowodnić. Aby taki dowód przeprowadzić, niezbędny jest system wyższego rzędu, którego spójności w ramach niego samego również nie da się dowieść.

Nie można zdefiniować pojęcia prawdy w obrębie języka, do którego to pojęcie się odnosi (ilustracja – „paradoks kłamcy"). Pojawiająca się sprzeczność jest wynikiem stosowania „ubogiej logiki", czy też „ubogiego języka". Paradoks powstaje na skutek tego, że pojęcie odnosi się samo do siebie, należy do klas samozwrotnych.

Przykłady: antynomia Grellinga, paradoks Richarda.

Platonizm – realizm matematyczny

Gödel twierdził, że niezależność hipotezy continuum od systemu ZFC nie implikuje, iż wartość logiczna tej hipotezy jest nieokreślona. Był on zwolennikiem platonizmu – realizmu matematycznego: „klasy i pojęcia matematyczne mogą być pojmowane jako rzeczywiste obiekty istniejące niezależnie od naszych definicji i konstrukcji". Skoro obiekty matematyczne istnieją niezależnie od naszych tworów myślowych i jeśli aksjomaty ZFC opisują pewną dobrze określoną rzeczywistość, wówczas w tej rzeczywistości hipoteza continuum musi być albo prawdziwa albo fałszywa, zaś nierozstrzygalność CH świadczy tylko o tym, że nasze aksjomaty nie stanowią pełnego opisu rzeczywistości. „Matematyka jest niezmysłową rzeczywistością, która istnieje niezależnie zarówno od aktów, jak i dyspozycji ludzkiego umysłu i jest tylko odkrywana, prawdopodobnie bardzo niekompletnie przez ludzki umysł".

Intuicjonizm

Intuicjonizm w matematyce to pogląd filozoficzny w zakresie istnienia obiektów matematycznych. Intuicjoniści uważają, że pewne atrybuty niektórych prostych obiektów matematycznych, jak np. liczb naturalnych czy obiektów geometrycznych lub własności przestrzeni, są nam dane i są dostępne poznaniu dzięki intuicjom jakie posiadamy na ich temat. Treść twierdzeń matematycznych, a zwłaszcza mechanizmy prowadzące do rozwoju wiedzy matematycznej w znacznej mierze dostępne są dzięki intuicji, możliwości wglądu i zrozumienia ich znaczenia dzięki pewnym często pierwotnym intuicjom umysłu. Intuicjonizm neguje prawdziwość niektórych aksjomatów logiki formalnej, a zwłaszcza aksjomat wyłączonego środka (p lub ~p), twierdząc, że w niektórych przypadkach w celu udowodnienia, że prawdziwe jest p nie wystarczy stwierdzić, że nieprawdziwe jest ~p, zwłaszcza, gdy sensem dowodzonego zdania p jest teza o istnieniu pewnych obiektów. Intuicjoniści twierdzą, że z faktu, iż z założenia że pewne obiekty nie istnieją wynika sprzeczność, nie wynika jeszcze ich istnienie (potrzebny jest konstruktywny dowód ich istnienia). Intuicjonizm stoi w opozycji do poglądów upatrujących sensu twierdzeń matematycznych wyłącznie w ich wyprowadzalności z aksjomatów, jak formalizm. Szczególnie mocno podkreśla on, że matematyka zawiera pewną treść, zaś udowadnianie i tworzenie nowych twierdzeń jest aktem twórczym nie polegającym wyłącznie na żonglowaniu symbolami matematycznymi. Z intuicjonizmu wyłonił się pogląd zwany konstruktywizmem. Jego zwolennicy stawiają sobie za cel rekonstrukcję wielu dziedzin matematyki przy użyciu ograniczonych finitystycznych środków. Podstawą jest intuicja zbioru liczb naturalnych odzwierciedlająca następstwo czasu. Nie dopuszcza się zbiorów nieprzeliczalnych, a wszystkie obiekty muszą dać się skonstruować za pomocą skończonej liczby kroków. Takie podejście było podstawą do rozwinięcia teorii rekursji oraz okazuje się owocne w naukach informacyjnych.